

ПРИРОДА ПАМПИНГ-ЭФФЕКТА В ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЕ

Ю.В. Фомин

*Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, г. Москва
yury.fomin88@gmail.com*

Введение

Пресная вода играет чрезвычайно важную роль в жизни и деятельности человека. Согласно [10], несмотря на огромное количество поверхностной воды, пресная вода составляет всего 2 % от общего объема воды на нашей планете. 77 % от общего количества пресной воды содержится в виде льда, около 1 % в озерах и реках, а 22 % – это грунтовые воды.

Современное производство, как и население Земли, растет, поглощая все большее количество пресной воды. Водоемы истощаются и, кроме того, загрязняются, поэтому все более остро встает вопрос об альтернативных источниках пресной воды. На данный момент, согласно различным источникам, например [10, 11], использование грунтовых вод составляет от 25 до 33 % от общего объема потребления пресной воды в мире. Основными проблемами, связанными с истощением запасов пресной воды в грунте, учитывая то, что около 70 % населения земли живет в прибрежных зонах, являются интенсивная добыча пресной воды и интрузия морской воды в водоносные пласты. В этой связи изучение механизмов интрузии, или фильтрации морской воды в водоносный горизонт берега является задачей крайне острой и актуальной.

При вариациях уровня воды в море возникает горизонтальная компонента градиента давления, которая приводит к фильтрации морской воды из моря в проницаемый грунт и обратно. Однако из-за того, что просочившаяся вода не успевает разгрузиться обратно

в море, за период колебания уровня воды, а именно за 12 ч 25 мин, возникает подъем среднего уровня грунтовой воды в сравнении со средним уровнем воды в море. Это так называемый "pumping-effect", или эффект накачки.

На данный момент существует большое количество работ, которые посвящены исследованию приливов на уровень грунтовых вод, например [1–5, 14, 15]. В указанных работах рассматриваются модели с вертикальным или плоским наклонным берегом, однако эти модели несправедливы в ряде случаев.

В предлагаемой работе изучается пампинг-эффект прибрежной зоны моря для произвольного профиля берега в двумерной постановке. Показано, что для данной модели, как и в случае плоского наклонного берега пампинг-эффект можно разделить на две составляющие. Составляющая, связанная с нелинейностью процесса, для нее предлагается название "базовый пампинг-эффект" и составляющая, связанная с профилем дна, для нее предлагается название "профильный пампинг-эффект". Приводятся примеры, для которых профильный превалирует над базовым пампинг-эффектом. В работе установлено, что безразмерном виде, линейная составляющая профильного пампинга не зависит от амплитуды колебания воды. Кроме того, описываются ограничения на параметры задачи, при которых рассматриваемая теория и выводы будут справедливы.

Математическая постановка задачи

При вариациях уровня воды, возникает горизонтальная компонента градиента давления, которая приводит к фильтрации морской воды из моря в грунт и обратно. В результате уровень подземной воды может изменяться во времени и в пространстве (рис. 1).

В одномерном случае уровень свободной поверхности грунтовой воды есть функция от координат x и времени t . В этом случае для описания движения воды в пористом грунте воспользуемся законом Дарси в виде

$$u = -C \frac{\partial h}{\partial x}; \quad C = \frac{k_p}{\mu} \rho g. \quad (1)$$

Здесь h – уровень подземной воды отсчитанный от среднего уровня морской воды; C – коэффициент фильтрации имеющий размерность скорости; k_p – коэффициент проницаемости имеющий размерность площади; μ – динамическая вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения.

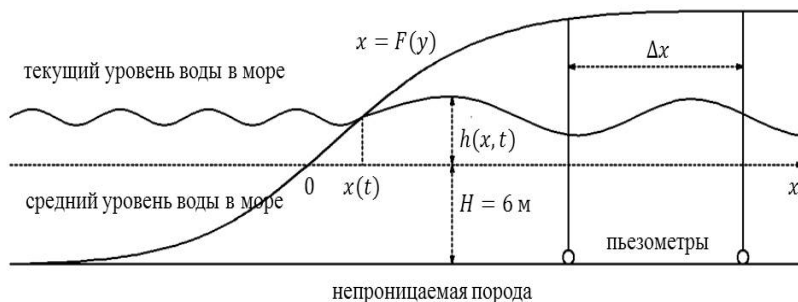


Рис. 1. Схема фильтрации морской воды в грунт прибрежной зоны:
 $F(y)$ – профиль дна; $x(t)$ – горизонтальная координата движения
 реза воды; Δx – расстояние между датчиками;
 $h(x, t)$ – уровень подземной воды; H – расстояние от среднего уровня
 воды до непроницаемого основания.

Используя уравнение неразрывности и предположения, сформулированные в [8, 7], можно описать поведение свободной поверхности грунтовой воды уравнением Буссинеска:

$$m \frac{\partial h}{\partial t} = C \frac{\partial}{\partial x} \left((H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (2)$$

где m – пористость грунта, безразмерная величина; H – глубина залегания непроницаемого для воды основания, отсчитанная от среднего уровня моря.

В данном разделе будем рассматривать водоносный слой бесконечной ширины. Случай водоносного слоя конечно ширины L_0 будет рассматриваться позже. В качестве граничных условий используем условие затухания скорости течения на бесконечности при $x \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial h}{\partial x}_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (3)$$

Введем еще одно предположение и будем считать, что в прибрежной зоне моря прилив выглядит как достаточно медленное подтопление берега. При этом поведение уровня морской воды в дальней зоне от берега никак не должно влиять на способность воды проникать из моря в водоносный слой берега. Поэтому уровень воды в море h_w можно представить как функцию, зависящую только от времени: $h_w = h_w(t)$.

Из-за рельефа дна движение уровня воды по наклонной плоскости приводит к движению уреза не только по вертикали, но и по горизонтали. Координату движения уреза воды по горизонтали обозначим $x(t)$.

Тогда на подвижном урезе воды условие сопряжения уровней вод в море $h_w(t)$ и в грунте $h(x, t)$ будет определяться выражением:

$$h(x(t), t) = h_w(t).$$

Для описываемого процесса воспользуемся простейшей гармонической зависимостью уровня моря $h_w(t)$ в следующем виде:

$$h_w(t) = a \cdot \cos \omega t, \quad (4)$$

где a – амплитуда; ω – частота колебаний уровня моря.

Предположим, что урез воды движется по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α (рис. 1). Если вертикальная координата уреза подчиняется соотношению (4), тогда горизонтальная координата определяется как

$$x(t) = a \cdot ctg \alpha \cdot \cos \omega t. \quad (5)$$

Окончательно граничное условие на движущемся по плоскому уклону урезе воды приводится к виду:

$$h(x(t), t) = a \cdot \cos \omega t$$

при

$$x(t) = a \cdot ctg \alpha \cdot \cos \omega t \quad 0^\circ < \alpha \leq 90^\circ \quad (6)$$

видно, что форма дна и берега вне зоны движения уреза воды не важны.

При малых значениях $h(x, t)$ будет справедливо линеаризованное уравнение (2), которое совпадает с уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \kappa H \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad \text{здесь } \kappa = \frac{C}{m},$$

с граничными условиями (3) и (6). Решение такой задачи записывается в виде следующего выражения:

$$h(x, t) = a \cdot e^{-kx} \cos(\omega t - kx). \quad (7)$$

Здесь параметр k является волновым числом и определяется как

$$k^2 = \frac{\omega}{2\kappa H}. \quad (8)$$

Данный параметр позволяет ввести в рассмотрение горизонтальный масштаб поставленной задачи в виде характеристики L , которая определяет глубину проникновения волнового решения (7) вглубь водоносного слоя вдоль оси x . Способ оценки данной величины будет приведен далее.

Отметим, что решение задачи с движущимся по наклонной плоскости граничным условием известно и описано в [1, 2, 13]. В данной работе будет рассматриваться береговой профиль произвольной формы.

Обсуждение экспериментальных данных

Прежде чем перейти к методике решения поставленной математической задачи, подробнее остановимся на фильтрационных свойствах грунтов прибрежной зоны. Из (7) и (8) видно, что уровень грунтовой воды в водоносном горизонте зависит от коэффициента κ . Данный коэффициент определяется как отношение коэффициента фильтрации к пористости грунта и имеет размерность скорости. В зависимости от проницаемого материала κ может сильно меняться, что в свою очередь влияет на уровень свободной поверхности грунтовой воды в водоносном горизонте.

В [1] описан эксперимент и приводятся данные с полигона в г. Лонгиербюен (о. Шпицберген, Норвегия), на котором производились измерения порового давления в прибрежном грунте. Здесь кратко опишем эксперимент и приведем экспериментальные данные, необходимые для дальнейших рассуждений и оценок.

Суть эксперимента заключалась в том, что на берегу Адвентфьорда были установлены четыре датчика измерения давления – пьезометры. Расположение датчиков таково, что на берегу они образуют четырехугольник и находятся на глубине $H = 6$ м от среднего уровня воды. Еще один датчик располагался в воде для регистрации колебаний уровня моря.

Полученные экспериментальные данные с каждого из датчиков после обработки представлялись в виде графика зависимости порового давления от времени с ярко выраженными минимумами и максимумами похожий на стандартную функцию типа $\cos\omega t$ или $\sin\omega t$.

Из-за пронизываемого пористого грунта, процесс распространения воды вглубь береговой зоны приводит к задержкам по времени между минимумами и максимумами показаний датчиков.

При отсутствии прямых измерений приведем оценки значения k на основе косвенных вычислений.

Используя решение (7) и задержку по времени Δt для показаний с двух различных датчиков, которое определяется из эксперимента, период волн (доминирующая полусуточная волна M_2 имеет период 12 ч 25 мин [6]) и известное расстояние между соответствующими датчиками Δx , можно оценить волновое число как:

$$k = \frac{\omega \Delta t}{\Delta x} = 0,018 \frac{1}{\text{м}}. \quad (9)$$

Тогда из выражения для волнового числа (8) можно получить следующее значение для коэффициента κ :

$$\kappa = 34 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Оценка данного параметра, который определяет фильтрационные свойства грунта исследовательского полигона, необходима для дальнейших расчетов.

Математическая постановка задачи для произвольной формы профиля дна

Рассмотрим произвольную форму профиля дна вблизи уреза воды в виде зависимости x от y : $x = F(y)$.

Разложение данного выражения по степеням y даст ряд:

$$x = m_1 y + m_2 y^2 + m_3 y^3 + \dots \quad (10)$$

Движение уреза воды по горизонтали $x(t)$ получается из (10) заменой $y = a \cdot \cos \omega t$, тогда получим выражение:

$$\begin{aligned} x(t) &= m_1 a \cos \omega t + m_2 a^2 \cos^2 \omega t + m_3 a^3 \cos^3 \omega t + \dots = \\ &= x = \sum_{n=1}^{\infty} m_n a^n \cos^n \omega t. \end{aligned} \quad (11)$$

Перейдем в подвижную систему координат, движущуюся по горизонтали вместе с урезом воды. Для этого осуществим замену:

$$\tilde{x} = x - x(t),$$

тогда в этой системе $h = h(\tilde{x}, t)$.

Уравнение (2) в этой подвижной системе координат будет записано в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \dot{x}(t) \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} = \kappa \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \left((H + h) \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}} \right). \quad (12)$$

Граничные условия в данном случае переписутся как

$$h(0, t) = a \cos \omega t, \quad \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}}_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0. \quad (13)$$

Данная замена использовалась в [13].

Формулировка задачи в безразмерном виде

Для обезразмеривания (12) введем следующие безразмерные величины. Координату \tilde{x} обезразмерим на характерный линейный размер L – глубина проникновения волнового возмущения внутрь береговой зоны:

$$L = \frac{1}{\kappa}, \text{ используя (9)} \quad L = 53 \text{ м.} \quad (14)$$

Время t обезразмериваем на характерный период $T = \frac{1}{\omega}$, где ω - частота прилива, а искомую функцию $h(\tilde{x}, t)$ обезразмерим на амплитуду колебаний a . Таким образом получаем следующий набор безразмерных величин:

$$X = \frac{\tilde{x}}{L} = \tilde{x}k; \quad \tau = \frac{t}{T} = \omega t; \quad \eta(X, \tau) = \frac{h}{a}.$$

Данные преобразования приводят уравнение (12) к виду:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \varepsilon \dot{x}(\tau) \frac{T}{L} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left((1 + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial X} \right). \quad (15)$$

Здесь параметр $\varepsilon = \frac{a}{H}$, который для исследуемого случая можно считать малым. Его оценочные значения 0,1–0,2. Кроме того, член $\dot{x}(\tau) \frac{T}{L}$ определяет влияние формы береговой линии на общий эффект. В случае наклонного берега, описанного в (5), вклад этого члена следующий:

$$\dot{x}(\tau) \frac{T}{L} = \frac{a}{H} \frac{Hctg\alpha}{L} \sin \tau = \varepsilon \beta \sin \tau.$$

Параметр $\beta = \frac{Hctg\alpha}{L}$ может меняться в зависимости от угла наклона α . Если выбрать диапазон углов $\alpha_{cr} < \alpha \leq 90^\circ$, где α_{cr} таковой, что $tg\alpha_{cr} = \frac{H}{L}$, тогда параметр β будет лежать в диапазоне $0 < \beta < 1$, произведение $\varepsilon\beta$ будет малым в общем случае порядка $O(\varepsilon)$. Исходя из параметров исследовательского полигона ($H = 6$ м, $L = 53$ м, $\alpha \approx 7^\circ$) оценка дает значение $\beta = 0,94$.

Выражение (15) для случая плоского наклонного берега выглядит следующим образом

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \delta \dot{x}(\tau) \frac{T}{L} \frac{\partial \eta}{\partial X} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X} \left((1 + \varepsilon \eta) \frac{\partial \eta}{\partial X} \right). \quad (16)$$

В (16) присутствуют два независимых безразмерных параметра ε и $\delta = \varepsilon\beta$. В общем случае численные значения данных параметров могут быть произвольными. Для условий исследовательского полигона на о. Шпицберген $\varepsilon \sim 0,166$, а $\beta \sim 0,94$, поэтому оба параметра

ε, δ можно считать малыми одного порядка. В результате в уравнении (16) оба слагаемых в правой части равенства оказались малыми одного порядка.

Формулировка задачи в размерном виде

Уравнение (16) в размерном виде при сохранении малости соответствующих слагаемых в уравнениях может быть записано с использованием формально «малых параметров», которые по окончанию всех вычислений положим равным единице. В общем виде соотношение (16) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \delta \dot{x}(t) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = \kappa \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left((H + \varepsilon h) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right). \quad (17)$$

с граничными условиями

$$h(0, t) = a \cdot \cos \omega t; \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{x}_{\bar{x} \rightarrow \infty}} = 0.$$

Слагаемое $\delta \dot{x}(t) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}}$ в (17) связано с уклоном дна, а $\kappa \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\varepsilon h \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right)$ с нелинейностью процесса фильтрации. Соотношение (17) с учетом малости слагаемых дает возможность искать решение уравнения при помощи разложения искомой функции в ряд по одному малому параметру ε , считая ε и δ одного порядка малости, и, заменив в (17) δ на ε , в этом случае получим выражение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \varepsilon x(t) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = \kappa \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left((H + \varepsilon h) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right). \quad (19)$$

Ввиду малости параметра ε имеет место разложение искомого решения в ряд по степеням ε

$$h = h_0 + \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots \quad (20)$$

Подставляя данное разложение в (17), (18) и приравнявая члены соответствующих порядков малости ε , для каждого приближения получаем соответствующее уравнение с граничными условиями.

Для нулевого приближения ε^0 :

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \kappa H \frac{\partial^2 h_0}{\partial \bar{x}^2}; \quad h_0(0, t) = a \cdot \cos \omega t; \quad \frac{\partial h}{\partial \bar{x}_{\bar{x} \rightarrow \infty}} = 0. \quad (21)$$

Для первого приближения ε^1 :

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} - \dot{x}(t) \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{x}} = \kappa H \frac{\partial^2 h_1}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 h_0^2}{\partial \tilde{x}^2}; \quad h_1(0, t) = 0; \quad \frac{\partial h}{\partial \tilde{x}_{\tilde{x} \rightarrow \infty}} = 0. \quad (22)$$

Дальнейшее разложение по малому параметру ε рассматриваться не будет.

Водоносный слой бесконечной ширины

В случае водоносного слоя бесконечно ширины решение (21) в нулевом порядке разложения малого параметра ε совпадает с решением линейного уравнения теплопроводности, решением (7), описанным ранее.

Перейдем к поиску решения задачи (22) для первого порядка разложения малого параметра ε и приведем необходимые выкладки.

Продифференцировав (11) по времени получаем следующее выражение:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} -n\omega m_n \alpha^n \sin \omega t \cos^{(n-1)} \omega t. \quad (23)$$

и подставляем в (22).

В силу линейности задачи (22) ее решение будем искать в виде суммы решения зависящего и не зависящего от времени, соответственно волновой и стационарной частей.

$$h_1(\tilde{x}, t) = h_1^s(\tilde{x}) + h_1^w(\tilde{x}, t),$$

где $h_1^s(\tilde{x})$ представляет собой среднее по времени положение уровня подземной воды и называется эффектом накачки (pumping effect). Детальное описание этого явления для различных физических ситуаций наиболее полно изложено в [3]. Волновая часть $h_1^w(\tilde{x}, t)$ представляет собой вариации уровня воды $h_1(\tilde{x}, t)$ вокруг значения $h_1^s(\tilde{x})$, при этом осредненное по времени значение $\langle h_1^w(\tilde{x}, t) \rangle_T$ равно нулю:

$$\langle h_1^w(\tilde{x}, t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T h_1^w(\tilde{x}, t) dt = 0. \quad (24)$$

В (22) член $\dot{x}(t) \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{x}}$ будет суммой ряда, n -й член которого используя (23) можно представить в виде:

$$-\omega m_n \alpha^{n+1} k e^{-k\tilde{x}} \left(\frac{1}{2} (\cos(k\tilde{x}) - \sin(k\tilde{x})) - \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - k\tilde{x}) + \sin(2\omega t - k\tilde{x})) \right) \cos^{n-1} \omega t.$$

Тогда вклад в стационарную часть эффекта накачки будут давать только члены при четных степенях $\cos^{n-1} \omega t$ или нечетные члены ряда (23). Для краткости математического описания ограничимся всего тремя членами (23), однако при необходимости можно использовать разложение со следующими приближениями. Стационарная часть решения $h_1^s(\tilde{x})$ задачи (22) выглядит следующим образом:

$$\frac{h_1^s(\tilde{x})}{\frac{\alpha^2}{H}} = \frac{Hkm_1}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \alpha^2 \frac{m_3}{m_1} + \frac{5}{8} \alpha^4 \frac{m_5}{m_1} \dots \right) (1 - e^{-k\tilde{x}} (\sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x}))) + \frac{1}{4} (1 - e^{-2k\tilde{x}}). \quad (25)$$

Эффект от стационарной компоненты (25) можно разделить на «профильный пампинг» (profile pumping) h_1^p , первое слагаемое суммы (25), оно обусловлено членом $\dot{x}(t) \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{x}}$, и базовый пампинг» (basic pumping) h_1^b , второе слагаемое суммы (25), обусловлено членом $\frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 h_0^2}{\partial \tilde{x}^2}$ из (22). Тогда, используя введенные обозначения из (25), получим выражение:

$$h_1^s(\tilde{x}) = h_1^p + h_1^b.$$

Из (25) видно, что профильный пампинг влияет на значение самого эффекта накачки; кроме того, в данное выражение входит волновое число k , которое зависит от характеристик грунта, а значит сам эффект меняется с изменением свойств водосного слоя. Помимо этого из (25) следуют свойства: 1) на урзе воды $\tilde{x} = 0$, $h_1^p = h_1^b = 0$; 2) с удалением от берега $\tilde{x} \rightarrow \infty$, $h_1^s(\tilde{x})$ не затухает, а выходит в пределе на постоянное значение, в то время как решение в нулевом приближении по ε затухает на больших расстояниях от берега.

В случае линейной формы берегового профиля, т. е. $m_1 = ctg\alpha$, $m_3 = m_5 = \dots = 0$, из (25) следует, что:

$$\frac{h_1^S}{a^2} = \frac{Hkm_1}{2} (1 - e^{-k\tilde{x}} \sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x})) + \frac{1}{4} (1 - e^{-2k\tilde{x}}). \quad (26)$$

Используя введенный параметр β , связанный с углом наклона берегового профиля, получим:

$$\frac{h_1^S}{a^2} = \beta (1 - e^{-k\tilde{x}} \sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x})) + \frac{1}{4} (1 - e^{-2k\tilde{x}}),$$

или в случае $\tilde{x} \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{h_1^S(\infty)}{a^2} = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4}. \quad (27)$$

Отдельно отметим, что при «больших» значениях β в выражении (27) слагаемым $\frac{1}{4}$ можно пренебречь. Данный случай будет рассматриваться в разделе «Условия применимости математической модели».

Пампинг-эффект для различных профилей дна

Теперь приведем примеры функции $F(y)$, аппроксимирующей профиль берега. Рассмотрим профиль береговой линии заданный функцией:

$$y = A \cdot \arctg \frac{x}{l}. \quad (28)$$

В данном случае ряд (11) будет записываться, как

$$x = \frac{l}{A} y + \frac{l}{3A^3} y^3 + \dots,$$

тогда коэффициенты $m_1 = \frac{l}{A}$, $m_3 = \frac{l}{3A^3}$, а значит $\frac{m_1}{m_3} = \frac{1}{3A^2}$. Подставим получившейся результат в (25), тогда в стационарном режиме получим выражение:

$$\frac{h_1^S(\infty)}{a^2} = \frac{Hkm_1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{\alpha^2}{A^2} \right) + \frac{1}{4}.$$

Теперь зададим профиль берега в виде кубической параболы:

$$y = (px)^{\frac{1}{3}}.$$

где параметр p определяет пологость профиля берега. Чем меньше p , тем более пологий профиль берега.

В данном примере ряд (11) будет состоять из одного члена, а именно:

$$x = \frac{y^3}{p} = m_3 y^3.$$

Подставим данное выражение в (25), тогда в стационарном режиме получим выражение:

$$\frac{h_1^s}{\frac{a^2}{H}} = \frac{3}{8} a^4 \frac{Hk}{p} \operatorname{ctg} \alpha (1 - e^{-k\tilde{x}} (\sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x}))) + \frac{1}{4} (1 - e^{-2k\tilde{x}}), \quad (29)$$

а отсюда следует, что

$$\frac{h_1^s(\infty)}{\frac{a^2}{H}} = \frac{3}{8} a^2 \frac{Hk}{p} + \frac{1}{4}.$$

Более подробный анализ данных примеров профилей береговой зоны приведен в [2].

Таким образом, можно заключить, что к повышению уровня свободной поверхности грунтовой воды приводит два фактора: 1) нелинейное поведение свободной поверхности грунтовых вод; 2) нелинейный профиль береговой линии. Кроме того, из приведенных примеров видно, что для ряда случаев оба этих фактора одинаковых порядков. При этом профильный пампинг в безразмерном виде в общем случае зависит от амплитуды колебания уровня моря a , в то время как базовый пампинг в безразмерном виде от a не зависит.

Условия применимости математической модели

Ранее в (14) был введен безразмерный параметр δ , который определялся как произведение $\varepsilon\beta$, где β безразмерный параметр связанный с углом наклона линейной части (10). Исходя из условий исследовательского полигона предполагалось, что параметр β малый для того, чтобы δ тоже оказался малым. Но так как β зависит от угла наклона берегового профиля, возникает вопрос, до какого критического значения угла наклона профиля берега α_{cr} можно применять методы решения, изложенные в данной работе.

Для малых ε и $\beta < 1$ уравнение (12) исследовалось в предыдущем разделе, а более подробно в [2], что соответствовало ограничению на угол $\alpha > \alpha_{cr}$. Если же мы хотим изучить ситуацию с меньшими, чем α_{cr} , углами, нам следует считать параметр β «большим».

В качестве пробного «большого» значения β выберем $\beta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Это приведет к новому ограничению на угол α , $\alpha < \alpha_{cr}$, где α_{cr} определяется соотношением $\tan \alpha_{cr1}$. Напомним, что для α_{cr} ранее получено из соотношения $\tan \alpha_{cr} = \frac{H}{L}$ для условий исследовательского полигона $\beta \sim 0,94$, $\alpha = 6^\circ$, тогда $\alpha_{cr1} = 2^\circ$.

При новом значении параметра в (17) поменяется порядок малости слагаемых, что приведет к соотношению:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \sqrt{\varepsilon} \dot{x}(t) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} = \kappa \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left((H + \varepsilon h) \frac{\partial h}{\partial \bar{x}} \right) \quad (31)$$

при граничных условиях (18).

Разложим уравнение (31) и искомое решение в ряд по степеням $\sqrt{\varepsilon}$:

$$h = h_0 + \sqrt{\varepsilon} h_1 + \varepsilon h_2 + \dots \quad (32)$$

Подставляя данное разложение в (31), (18), приравнивая члены соответствующих порядков малости $\sqrt{\varepsilon}$, для каждого приближения, получаем соответствующее уравнение с граничными условиями.

Для нулевого приближения по порядку малости $(\sqrt{\varepsilon})^0$:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \kappa H \frac{\partial^2 h_0}{\partial \bar{x}^2}; \quad h_0(0, t) = a \cdot \cos \omega t; \quad \frac{\partial h_0}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x} \rightarrow \infty} = 0.$$

Решение данного приближения совпадает с решением линейного уравнения теплопроводности.

Для первого приближения по порядку малости $(\sqrt{\varepsilon})^1$ получим соотношение:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} - \kappa H \frac{\partial^2 h_1}{\partial \bar{x}^2} = x(t) \frac{\partial h_0}{\partial \bar{x}}; \quad h_1(0, t) = 0; \quad \frac{\partial h_1}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x} \rightarrow \infty} = 0.$$

Как уже описывалось ранее, решение данной системы есть сумма стационарной h_1^S и волновой h_1^W составляющих, где

$$h_1^s = \frac{a^2 km_1}{2} (1 - e^{-k\tilde{x}} (\sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x}))). \quad (33)$$

$$h_1^\omega = \frac{a^2 km_1}{2} e^{k\tilde{x}} \sin(2\omega t - k\tilde{x}) - \frac{a^2 km_1}{2} e^{-k\tilde{x}} \cos(2\omega t - k\tilde{x}) - \\ - \frac{a^2 km_1}{2} e^{-\sqrt{2}k\tilde{x}} \sin(2\omega t - \sqrt{2}k\tilde{x}) + \frac{a^2 km_1}{2} e^{-\sqrt{2}k\tilde{x}} \cos(2\omega t - \sqrt{2}k\tilde{x}). \quad (34)$$

для линейного уклона дна коэффициент $m_1 = ctg \alpha$.

Для второго приближения по порядку малости $(\sqrt{\varepsilon})^2$ приведем аналогичные соотношения:

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} - \kappa H \frac{\partial^2 h_2}{\partial \tilde{x}^2} = \chi(t) \frac{\partial h_1}{\partial \tilde{x}} + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 h_0^2}{\partial \tilde{x}^2}; \quad h_2(0, t) = 0; \quad \frac{\partial h_1}{\partial \tilde{x}} \Big|_{\tilde{x} \rightarrow \infty} = 0. \quad (35)$$

В данном приближении будем исследовать только стационарную часть решения, так как волновая часть при осреднении по периоду колебаний дает 0, а значит не дает вклада в общий эффект.

$$h_2^s = \frac{a^2}{4H} (1 - e^{-2k\tilde{x}}). \quad (36)$$

Дальнейшее разложение по малому параметру $\sqrt{\varepsilon}$ рассматриваться не будет.

Таким образом, стационарная часть решения уравнения (31) с граничными условиями (18) можно записать в виде суммы:

$$h^s = \frac{a^2 km_1}{2} (1 - e^{-k\tilde{x}} (\sin(k\tilde{x}) + \cos(k\tilde{x}))) + \frac{a^2}{4H} (1 - e^{-2k\tilde{x}}). \quad (37)$$

Соотношение (33) демонстрирует профильный пампинг, в котором сняты ограничения на малость угла наклона берегового профиля. При этом основная часть базового пампинга остается прежней и соответствует (36). Суммарный эффект накачки, состоящий из базового и профильного пампингов, остается прежней. Это означает, что можно пользоваться соотношением (37), но в (37) смягчены ограничения на малость углов уклона профиля дна. Таким образом, соотношение (37) можно использовать для углов $\alpha_{cr1} < \alpha < \alpha_{cr}$. Качественно это означает, что профильный пампинг будет превалировать.

Если в (33) устремить \tilde{x} в бесконечность используя параметр β , получим выражение:

$$\frac{h_1^s(\infty)}{\frac{a^2}{H}} = \frac{1}{2} \beta. \quad (38)$$

Напомним, что результат (38) получен для «больших» β . Анализ эффекта для «малых» углов наклона берегового профиля показывает, что преобладающей составляющей является профильный пампинг. Однако необходимо отметить, что для произвольной формы берегового профиля ранее при условии $\beta \lesssim O(1)$, т. е. для $\alpha > \alpha_{cr}$, из (24) был получен следующий результат:

$$\frac{h_1^s(\infty)}{H} = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}. \quad (39)$$

Для «больших» β соотношение (39) упрощается и совпадает с (38).

Для того, чтобы оценить вклад базовой и профильной составляющих в общий пампинг-эффект, выберем некоторое значение угла α_0 и соответствующие параметры β_0 и ω_0 как характеристики для сравнения с другими аналогичными α , β и ω . В частности, для условия исследовательского полигона на о. Шпицберген ω_0 – частота полусуточного прилива, тогда $\tan \alpha_0 = \sqrt{\frac{\omega_0 H}{2\kappa}}$, где $H = 6$ м, $\kappa = 0,03 \frac{M}{c}$ $\beta_0 = 0,94$. Тогда все указанные характеристики связаны соотношением:

$$\frac{\beta}{\beta_0} \frac{tg \alpha}{tg \alpha_0} = \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}}. \quad (40)$$

которое дает возможность оценить пампинг-эффект для других уклонов и частот волн при одинаковых параметрах грунта.

В координатах $(\frac{tg \alpha}{tg \alpha_0}, \sqrt{\frac{\omega}{\omega_0}})$ изолинии $\beta = const$ представляют собой прямые линии, исходящие из начала координат. На рис. 2 представлен пример изолиний для трех случаев $\beta = 0,5, 0,94, 3,2$.

Прямая $\beta = 0,5$ соответствует равенству дополнительной накачки грунтовой воды от базового и профильного пампинг-эффектов. Выше этой линии (область 1) профильный больше, чем базовый пампинг-эффект. Ниже (область 2) наблюдается противоположная ситуация.

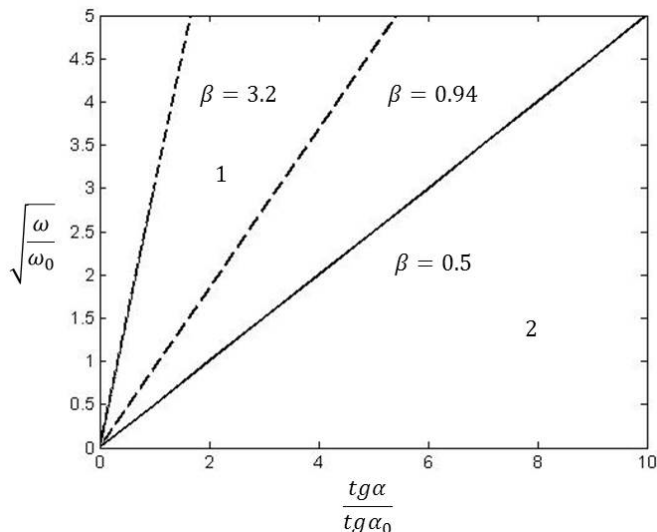


Рис. 2. Значимость вклада в пампинг эффект базового и профильной компоненты. Область 1 – преобладание профильного над базовым пампинг-эффектом. Область 2 – преобладание базового пампинг-эффекта над профильным. Линия равновесия эффектов соответствует прямой $\beta=0,5$. Точка (1, 1) лежит на прямой $\beta=0,5$ и соответствует условиям полигона на о. Шпицберген.

Как видим из рис. 2, в условиях исследовательского полигона на о. Шпицберген изолинии $\beta = 0,94$ лежит в зоне 1 и, следовательно, профильный пампинг более важен, чем базовый пампинг. Дальнейшее уменьшение угла уклона дна α приведет к тому, что параметр β будет нарастать и, следовательно, относительный вклад профильного пампинг-эффекта будет увеличиваться. Увеличение частоты ω при сохранении угла наклона дна α приведет к аналогичному результату.

Ограничения на частоты волн

Кроме влияния профиля берега, как уже было отмечено выше, частота колебаний морских волн тоже оказывает влияние на эффект

накачки морской воды в грунт прибрежной зоны. Согласно (40), чем выше частота колебания волн ω , тем сильнее проявляется профильный пампинг-эффект. Однако описываемая математическая модель не подходит в случае «больших» частот. Применяемое уравнение Буссинеска выведено для случая $L \gg h$ или $kH \ll 1$, откуда можно получить ограничение модели на частоту волн ω .

Воспользуемся ограничением:

$$kH \ll 1. \quad (41)$$

Подставляем в (37) выражение для волнового числа k из (20), тогда получим

$$\sqrt{\frac{\omega}{2\kappa H}} H \ll 1. \quad (42)$$

Окончательное ограничение для периодов волн получаем из (38)

$$\frac{\pi H}{\kappa} \ll T. \quad (43)$$

Для параметров исследовательского полигона на о. Шпицберген коэффициент $\kappa = 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, такая величина характерна для песка, $H = 6$ м. Таким образом, подставляя данные значения в (39) получим следующее ограничение на период колебаний волн: $T \gg 10$ мин.

Это означает, что приведенная математическая модель при определенных условиях исследовательского полигона описывает воздействие на уровень грунтовой воды таких волн, как приливные, сейши или любые низкочастотные колебания уровня воды любой природы. Более высокочастотные волны в рамках данной модели рассматриваться не могут.

Пампинг-эффект для конечной ширины водосного слоя

Вышеизложенные рассуждения и выкладки приводились для случая распространения грунтовой воды в бесконечном водосном слое. Сформулируем задачу для случая конечной ширины

водоносного слоя. Необходимо решить одномерное нелинейное уравнение Буссинеска (2) в ограниченной области:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left((H + h) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad x(t) \leq x \leq L_0, \quad \kappa = \frac{C}{m}. \quad (45)$$

Еще раз повторим, что здесь m – пористость грунта водоносного слоя, безразмерная величина; C – коэффициент фильтрации, имеющий размерность скорости; H – глубина залегания непроницаемого для воды основания, которая отсчитывается от среднего уровня моря. Будем предполагать, что данная величина постоянная; $h(x, t)$ – уравнение свободной поверхности грунтовых вод, которое отсчитывается от среднего уровня грунтовой воды.

Коэффициент κ имеет размерность скорости и отвечает за фильтрационные свойства грунта. В исследуемой модели, полагаем, что $\kappa = const$.

Будем рассматривать водоносный слой конечной ширины, тогда в качестве граничных условий будем использовать условие отсутствия скорости течения на дальней границе L_0 :

$$\frac{\partial h}{\partial x}_{x=L_0} = 0. \quad (46)$$

и условие на подвижном урезе воды $x(t)$, сопряжения уровней воды в море $h_w(t)$ и в грунте $h(x, t)$:

$$h(x(t), t) = h_w(t), \quad x(t) = h_w(t)ctg\alpha. \quad (47)$$

Будем рассматривать случай, когда урез воды движется по плоскому наклонному берегу с углом наклона берега α , а вертикальное движение свободной поверхности в море происходит по закону:

$$h_w(t) = a \cdot \cos\omega t.$$

Перейдем в подвижную систему координат, в которой область решения задачи будет неподвижна:

$$X = \frac{L_0(x-x(t))}{L_0-x(t)}. \quad (48)$$

Данное преобразование отображает отрезок $[x(t), L_0]$ на отрезок $[0, L_0]$. Применим (48) к (45), тогда получим следующее выражение:

$$\frac{\partial h(X, t)}{\partial t} - \dot{x}(t) \frac{1 - \frac{X}{L_0}}{1 - \frac{x(t)}{L_0}} \frac{\partial h(X, t)}{\partial X} = \frac{\kappa}{\left(1 - \frac{x(t)}{L_0}\right)^2} \frac{\partial}{\partial X} \left((H + h) \frac{\partial h}{\partial X} \right),$$

$$0 \leq X \leq L_0. \quad (49)$$

Граничные условия преобразуются следующим образом, условие (46):

$$\frac{\partial h(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=L_0} = 0, \quad (50)$$

граничное условие (47):

$$h(X, t)_{X=0} = h_w(t). \quad (51)$$

Для обезразмеривания (49) введем следующие безразмерные величины:

$$\xi = \frac{X}{L}; \quad \tau = \omega t; \quad h(X, t) = a\eta(\xi, \tau). \quad (52)$$

Здесь L , – это горизонтальный размер проникновения волнового возмущения в пористый прибрежный грунт. Ранее для исследовательского полигона на о. Шпицберген было получено значение $L = 53$ м.

Тогда, подставив величины из (52) в уравнение (49), получим выражение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} - \varepsilon \beta \frac{1 - \frac{\xi L}{L_0}}{1 - \frac{\text{actg} \alpha}{L_0}} \sin \tau \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\text{actg} \alpha}{L_0} \cos \tau\right)^2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left((1 + \varepsilon \beta) \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \right). \quad (53)$$

В выражении (53) введены уже знакомые нам безразмерные параметры ε, β . Для дальнейших рассуждений введем еще один безразмерный параметр σ :

$$\sigma = \frac{L}{L_0}.$$

Известно, что на исследовательском полигоне на расстоянии примерно 400 м от берега скальные породы выходили на поверхность Земли и тем самым ограничивали ширину зоны проникновения L_0 морских вод в проницаемый грунт прибрежной зоны. Таким

образом, для исследовательского полигона на о. Шпицберген параметр $\sigma = 0.1$. В общем случае данный параметр может быть любым, но здесь будем рассматривать случай, когда $L_0 \sim L$, тогда для дальнейших вычислений $\sigma \sim 1$.

Используя введенные безразмерные параметры $\varepsilon, \beta, \sigma$ и учитывая, что

$$\frac{actg\alpha}{L_0} = \frac{a}{H} \frac{H}{L} ctg\alpha \frac{L}{L_0} = \varepsilon\beta\sigma.$$

перепишем (53) в следующем виде:

$$\frac{\partial\eta}{\partial\tau} - \varepsilon\beta \frac{1 - \frac{\xi L}{L_0}}{1 - \frac{actg\alpha}{L_0}} \sin\tau \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1 - \varepsilon\beta\sigma\cos\tau)^2} \frac{\partial}{\partial\xi} \left((1 + \varepsilon\beta) \frac{\partial\eta}{\partial\xi} \right),$$

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{\sigma}. \quad (54)$$

Из вышеуказанных рассуждений следует естественное ограничение:

$$\varepsilon\beta\sigma < 1. \quad (55)$$

Теперь сформулируем задачу в размерном виде, сохранив реальную малость соответствующих слагаемых, а для этого введем «малый параметр» γ такой, что $\gamma \sim \varepsilon$; $\gamma \sim \varepsilon\beta$; $\gamma \sim \varepsilon\beta\sigma$. По окончании всех вычислений γ положим равным единице, тогда исходное уравнение записывается следующим образом:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \gamma a \omega ctg\alpha \frac{1 - \frac{x}{L_0}}{1 - \gamma \frac{x(t)}{L_0}} \sin\omega t \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\kappa}{(1 - \gamma \frac{x(t)}{L_0})^2} \frac{\partial}{\partial x} \left((H + \gamma h) \frac{\partial h}{\partial x} \right), \quad (56)$$

с граничными условиями:

$$h(X, t)_{x=0} = a \cdot \cos\omega t, \quad \frac{\partial h(X, t)}{\partial x} \Big|_{x=L_0} = 0.$$

Из-за малости параметра γ решение системы (13), (14) будем искать в виде ряда:

$$h = h_0(X, t) + \gamma h_1(X, t) + \gamma^2 h_2(X, t) + \dots \quad (58)$$

Подставляя разложение (58) в (56) и (57) и приравнявая члены соответствующих порядков малости γ , для каждого приближения получаем соответствующее уравнение с граничными условиями. Ограничимся первыми двумя членами разложения (58), хотя в случае необходимости можно прибегнуть и к более подробному разложению.

Для нулевого приближения γ^0 получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \kappa H \frac{\partial^2 h_0}{\partial X^2}; \quad h_0(X, t)_{X=0} = a \cdot \cos \omega t; \quad \frac{\partial h_0(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=L_0} = 0. \quad (59)$$

Для первого приближения γ^1

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_1}{\partial t} = & \kappa H \frac{\partial^2 h_1}{\partial X^2} + \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 h_0^2}{\partial X^2} + 2\kappa H \frac{2actg\alpha}{L_0} \cos \omega t \frac{\partial^2 h_0}{\partial X^2} - \\ & - a\omega ctg\alpha \left(1 - \frac{X}{L_0}\right) \sin \omega t \frac{\partial h_0}{\partial X}. \end{aligned} \quad (60)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{\kappa H} \frac{\partial h_1}{\partial t} = & \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[h_1 + \frac{1}{2H} h_0^2 + \frac{2actg\alpha}{L_0} h_0 \cos \omega t \right] - \\ & - 2ak^2 ctg\alpha \left(1 - \frac{X}{L_0}\right) \sin \omega t \frac{\partial h_0}{\partial X}. \end{aligned} \quad (61)$$

с граничными условиями:

$$h_1(X, t)_{X=0} = 0; \quad \frac{\partial h_1(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=L_0} = 0. \quad (62)$$

Решение системы (59) будем искать в виде суммы волн падающих и отраженных:

$$\begin{aligned} h_0 = & \bar{A} e^{-kx} \cos(\omega t - kx) + \bar{B} e^{kx} \cos(\omega t + kx) + \\ & + \bar{M} e^{-kx} \sin(\omega t - kx) - \bar{M} e^{kx} \sin(\omega t - kx). \end{aligned} \quad (63)$$

Подставляя (63) в (59), вычислим значение коэффициентов $\bar{A}, \bar{B}, \bar{M}$.

$$\bar{A} = \frac{e^{2kL_0} + \cos 2kL_0}{2(ch2kL_0 + \cos 2kL_0)} \cdot a = A \cdot a,$$

$$\bar{B} = \frac{e^{-2kL_0} + \cos 2kL_0}{2(\cos 2kL_0 + \cos 2kL_0)} \cdot a = B \cdot a, \quad (64)$$

$$\bar{M} = \frac{e^{2kL_0} + \cos 2kL_0}{2(\cos 2kL_0 + \cos 2kL_0)} \sin 2kL_0 \cdot a = M \cdot a.$$

Из выражений (64) можно заметить, что $A + B = 1$.

В силу линейности уравнения (61) по h_1 общее решение системы (61), (62) можно представить в виде суммы стационарной и волновой частей. Соответственно, стационарная часть не зависит от времени, а волновая зависит.

$$h_1(X, t) = h_1^s(X) + h_1^w(X, t). \quad (65)$$

Осреднение по времени волновой части решения (65) $\langle h_1^w(X, t) \rangle_T$. Это означает, что осредненное по периоду общее решение системы (61), (62) есть стационарная часть решения.

$$\langle h_1(X, t) \rangle_T = h_1^s(X). \quad (66)$$

Тогда, осреднив выражение (61) и подставив в него выражение (66), получим следующие выражения

$$0 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} \left[h_1^s + \frac{1}{2H} \langle h_0^2 \rangle_T + \frac{2actg\alpha}{L_0} \langle h_0 \cos \omega t \rangle_T \right] - \\ - 2ak^2ctg\alpha \left(1 - \frac{X}{L_0} \right) \langle \sin \omega t \frac{\partial h_0}{\partial X} \rangle_T. \quad (67)$$

при

$$h_1^s(X, t)_{X=0} = 0; \quad \frac{\partial h_1^s(X, t)}{\partial X} \Big|_{X=L_0} = 0. \quad (68)$$

Проинтегрировав выражение (67) дважды, получаем выражение для стационарной части пампинг-эффекта:

$$h_1^s = CX + S - \frac{1}{4H} \langle h_0^2 \rangle_T + \frac{2actg\alpha}{L_0} \langle h_0 \cos \omega t \rangle_T + \\ + \int \left(\int 2ak^2ctg\alpha \left(1 - \frac{X}{L_0} \right) \langle \sin \omega t \frac{\partial h_0}{\partial X} \rangle_T dX \right) dX. \quad (69)$$

Проделав все необходимые действия, получим следующий результат:

$$h_1^s = CX + S - \frac{1}{4H} I_1 + \frac{a^2ctg\alpha}{2L} \left(1 - \frac{X}{L_0} \right) I_2. \quad (70)$$

где

$$I_1(X) = A^2 e^{-2kX} + B^2 e^{2kX} + M^2(e^{-2kX} + e^{2kX}) + \\ + 2(AB - M^2)\cos 2kX - 2M\sin 2kX.$$

$$I_2(X) = (A + M)e^{-kX}\cos kX + (M - B)e^{kX}\cos kX + \\ + (A - M)e^{-kX}\sin kX + (B + M)e^{kX}\sin kX.$$

Константы C, S находятся исходя из граничных условий (68), а выражения для констант выглядят следующим образом:

$$C = \frac{a^2}{2H}(A^2 e^{-2kL_0} + B^2 e^{2kL_0} + M^2(e^{-2kL_0} + e^{2kL_0}) + 2(AB - M^2)\cos 2kL_0 - \\ - 2M\sin 2kL_0)k - \frac{a^2}{2L_0}((A + M)e^{-kL_0}\cos kL_0 + (M - B)e^{kL_0}\cos kL_0 + \\ + (A - M)e^{-kL_0}\sin kL_0 + (B + M)e^{kL_0}\sin kL_0)k.$$

$$S = \frac{a^2}{4H} + \frac{a^2 \operatorname{ctg} \alpha}{2L}(A - B + 2M).$$

Для удобства перепишем получившееся выражение (70) в безразмерном виде. Для этого поделим уравнение (70) на $\frac{a^2}{H}$, кроме того, введем безразмерный параметр $\xi = kX$, тогда с учетом уже введенного параметра β получится следующее выражение:

$$\frac{h_1^S}{a^2} = C\xi + S - \frac{1}{4}I_1(\xi) + \frac{\beta}{2}\left(1 - \frac{L\xi}{L_0}\right)I_2(\xi), \quad (71)$$

где

$$I_1(\xi) = A^2 e^{-2\xi} + B^2 e^{2\xi} + M^2(e^{-2\xi} + e^{2\xi}) + \\ + 2(AB - M^2)\cos 2\xi - 2M\sin 2\xi,$$

$$I_2(\xi) = (A + M)e^{-\xi}\cos \xi + (M - B)e^{\xi}\cos \xi + \\ + (A - M)e^{-\xi}\sin \xi + (B + M)e^{\xi}\sin \xi.$$

Выражение (71) используется для получения численной зависимости общего пампинг-эффекта от координаты ξ для различных L_0 при фиксированном $\beta = 0,94$. Результаты представлены на рис. 3.

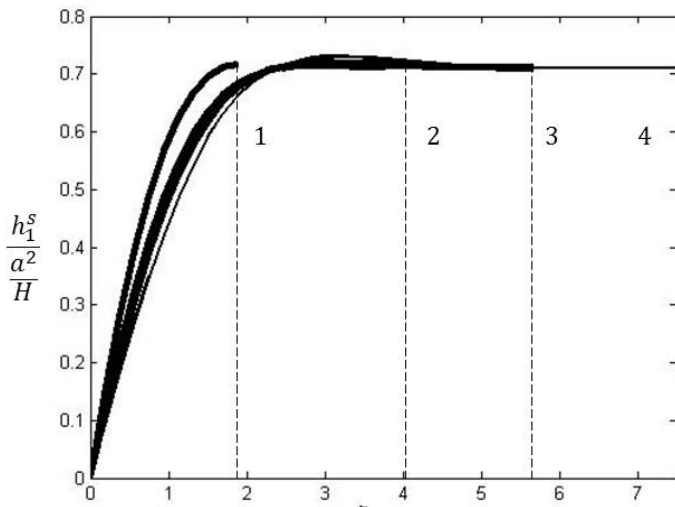


Рис. 3. Значение безразмерного пампинг-эффекта при различной ширине водоносного слоя. Цифра 1 соответствует пампинг-эффекту для ширины водоносного слоя $L_0 = 100$ м; 2 – $L_0 = 200$ м; 3 – $L_0 = 300$ м; 4 – $L_0 = 400$ м.

Из выражения (71) видно, что пампинг-эффект в безразмерном виде, так же как и в (25) представляет собой сумму базовой и профильной составляющих, при чем можно увидеть, что при $\xi \rightarrow kL_0$ профильная составляющая затухает и обращается в 0 при $\xi = kL_0$.

На рис. 3 представлен пример пампинг-эффект для различной ширины водоносного горизонта L_0 в безразмерных координатах. По оси абсцисс безразмерная горизонтальная координата ξ , по оси ординат безразмерная величина $\frac{h_1^S}{\frac{a^2}{H}}$. Представлены кривые соответственно для $L_0 = 100, 200, 300, 400$ м. Видно, что общий пампинг-эффект, который так же является суммой базовой и профильной составляющих, увеличивается по мере удаления от берега в глубь водоносного слоя и выходит на постоянный уровень. Кроме того, можно увидеть, что для условий исследовательского полигона на о. Шпицберген ширину водоносного слоя больше чем 200 м или

$L_0 = 4L$ можно заменить на $L_0 = \infty$ и для анализа эффекта накачки с достаточной точностью пользоваться моделью (17), (18) и решением (25).

Заключение

В данной работе получен ряд результатов, которые описывают поведение грунтовых вод в прибрежной зоне моря и приближают к понимаю природы пампинг-эффекта.

1. Описана математическая модель подъема уровня свободной поверхности грунтовой воды в случае произвольного профиля дна. Показано, что как и в случае плоского наклонного берега суммарный пампинг-эффект формируют базовый, связанный с нелинейностью процесса и профильный, связанный с профилем дна. В случае аппроксимации профиля дна некоторой нелинейной функцией приведена зависимость профильного пампинга от коэффициентов разложения функции.

Кроме того, установлено, что в безразмерном виде линейная составляющая профильного пампинга не зависит от амплитуды колебания воды, в то время как наблюдается степенная зависимость нелинейных членов от амплитуды. При этом безразмерный базовый пампинг от амплитуды не зависит.

Приведены расчеты пампинг-эффекта для аппроксимирующих профиль дна функций в виде степенных зависимостей.

2. Для частного случая формы дна – плоского наклонного берега приводится критическое значение угла наклона дна, для которого описанная математическая модель остается верной.

Показано, что при значениях угла наклона береговой линии $2^\circ < \alpha < 7^\circ$ общая накачка на исследовательском полигоне на о. Шпицберген происходит в основном из-за профильного пампинг-эффекта.

Кроме того, показано, что для условий исследовательского полигона уменьшение угла уклона α приводит к тому, что относительный вклад профильного пампинг-эффекта будет увеличиваться.

3. Увеличение частоты колебания уровня моря при сохранении фильтрационных свойств грунта и угла наклона дна α приведет к

тому, что вклад профильного пампинг-эффекта будет увеличиваться.

4. Приведены ограничения на типы волн, которые рассматриваются в рамках описываемой математической модели для исследовательского полигона на о. Шпицберген. Получено, что указанными методами можно исследовать влияние волн, период которых, превышает 10 минут.

5. Описана математическая модель подъема уровня свободной поверхности воды в случае конечной ширины водоносного слоя. Показано, что и в этом случае суммарный пампинг-эффект формируют базовая и профильная составляющие.

Установлено, что для конкретных условий исследовательского полигона на о. Шпицберген ширину водоносного слоя $L_0 \sim 4L$ можно заменить на $L_0 \rightarrow \infty$ и пользоваться результатами для модели с бесконечной шириной водоносного слоя.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-37-00053.

Список использованных источников

1. Жмур В.В., Марченко А.В., Фомин Ю.В. Нестационарная фильтрация морских вод в водоносные слои прибрежной зоны моря // Водные ресурсы (в печати)

2. Жмур В.В., Фомин Ю.В., Марченко А.В. Особенности формирования уровня грунтовой воды в прибрежной зоне, в случае произвольной формы дна // Водные ресурсы (в печати)

3. Зырянов В.Н., Хубларян М.Г. Пампинг-эффект в теории нелинейных процессов типа уравнения теплопроводности и его приложение в геофизике // ДАН. – 2006. – Т. 408, №. 4. – С. 535–538.

4. Зырянов В.Н., Хубларян М.Г., Фролов А.П. Нелинейная динамика безнапорной фильтрации грунтовых вод // ДАН. – 2009. – Т. 426, №. 1. – С. 101–105.

5. Зырянов В.Н., Фролов А.П., Хубларян М.Г. Некоторые нелинейные режимы фильтрации грунтовых вод // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2009. – Вып. 5. – С. 110–120.

6. Мельхиор П. Земные приливы. – М.: Мир, 1968. – С. 35–38.

7. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – С. 431–451.

8. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. – М.: Физматлит, 2001. – С. 60–66.
9. Хубларян, М.Г., Фролов А.П., Юшманов И.О. Интрузия морских вод в прибрежные водоносные горизонты // Водные ресурсы. – 2008. – Т. 35, № 3. – С. 288–301.
10. Bear J., Cheng A.H.-D., Sorek S., Ourar D., Herrar I. Seawater intrusion in coastal aquifers -concepts, methods and practices. – Kluwer Academic Publishers, 1999. – 625 p.
11. Barlow P.M. Ground water in freshwater-saltwater environments of the Atlantic Coast. – U.S. Geological Survey, 2003.
12. Fomin Y.V., Zhmur V.V., Marchenko A.V., Onishenko D.A. Heat flow and filtration of seawater in the coastal zone of the Arctic Shelf // SPE Arctic and Extreme Environments Conference and Exhibition, 2013. – doi 10.2118/166940-RU.
13. Jeng D.-S., Seymour B.R., Barry D.A., Li L., Parlange J.-Y. New approximation for free surface flow of groundwater: capillarity correction // Adv. Water Resour. – 2005. – Vol. 28, No. 10. – P. 1032–1039.
14. Li L., Barry D.A., Stagnitti F., Parlange J.-Y., Jeng D.-S. Beach water table fluctuations due to spring-neap tides: moving boundary effects // Adv. Water Resour. – 2000. – Vol. 23, No. 8. – P. 817–824.
15. Raubenheimer B., Guza R.T. Tidal water table fluctuations in a sandy ocean beach // Water Resources Research. – 1999. – Vol. 35, No. 8. – P. 2313–2320.

Поступила в редакцию 23.06.2016 г.