

АНАЛИЗ СХЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ ПРЕДИКТОР-КОРРЕКТОР И ЕЕ ВНЕДРЕНИЕ В МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ ПЛАВ

Г.С. Гойман

*Московский физико-технический институт
Институт вычислительной математики РАН
gordeygoyman@gmail.com*

Введение

В атмосфере присутствуют как «быстрые» физические процессы, связанные с распространением инерционно-гравитационных волн, так и относительно «медленные», например адвекция прогностических величин или распространение волн Россби. Системы, в которых одновременно происходит развитие процессов с сильно отличающимися характерными скоростями, называют жесткими. Моделирование таких систем является сложной задачей с точки зрения вычислительной математики, т.к. при этом ставятся сильные ограничения на шаг интегрирования по времени при использовании обычных численных методов. В тоже время применение маленьких шагов интегрирования по времени неприемлемо в гидростатических моделях атмосферы по двум причинам: во-первых, ошибки, связанные с дискретизацией уравнений по времени, как правило, на несколько порядков меньше ошибок пространственной аппроксимации, и измельчение шага в этом случае не приносит никакого выигрыша в качестве прогноза [8]. Во-вторых, использование большого количества шагов интегрирования занимает много вычислительного времени, что не позволяет оперативно просчитывать прогноз погоды. Именно поэтому применение полунеявного полулагранжева метода для интегрирования

уравнений, предложенного впервые Робером в 1981 году [9], стало очень популярным подходом в моделях общей циркуляции атмосферы.

Суть данного метода заключается в том, что линейная часть уравнений, описывающая «быстрые» инерционно-гравитационные волны, интегрируется неявно, в то время как часть уравнений, отвечающая «медленным» физическим процессам, интегрируется явно. Такой метод обладает рядом преимуществ. Во-первых, неявное интегрирование быстрых физических процессов в сочетании с полулагранжевым методом представления адвекции [10] позволяет использовать намного большие шаги по времени, по сравнению с Эйлеровыми методами. Это является особенно важным, если речь идет об оперативном прогнозе погоды, на который накладывается ограничения по вычислительному времени, требуемого модели для прогноза на сутки. Во-вторых, несмотря на использование больших шагов по времени, нет необходимости решать нелинейное уравнение, т.к. нелинейная часть интегрируется по времени явно, что также позволяет заметно сэкономить вычислительные ресурсы.

К недостаткам данного метода можно отнести тот факт, что использование относительно больших шагов по времени может приводить к возникновению локальных мелкомасштабных осцилляций, связанных с неустойчивостью явной аппроксимации нелинейных слагаемых уравнений динамики. Один из вариантов решения данной проблемы – использование схемы SETTLS, предложенной Хорталом в 2002 году [7]. Этот подход, реализованный в глобальной полулагранжевой модели атмосферы ПЛАВ [2], до недавнего времени успешно боролся с данным недостатком. Однако тестирование модели ПЛАВ высокого разрешения (1600×865×51) показало, что использование больших шагов по времени приводит к возникновению ложных локальных осцилляций и даже к развитию неустойчивости при некоторых условиях.

Таким образом, возникает необходимость разработки подхода к аппроксимации нелинейных слагаемых, который позволял бы использовать относительно большие шаги интегрирования по времени. Один из таких подходов основывается на идее метода предиктор-корректор. И хотя использование таких методов требует

выполнения нескольких итераций на каждом шаге по времени, их применение может быть выгодно с точки зрения вычислительного времени, т.к. на каждом шаге требует пересчета лишь блок динамики, который «занимает» около 30 % вычислительного времени, остальное время приходится на блок параметризаций процессов подсеточного масштаба, который просчитывается один раз за шаг по времени.

В данной работе выполнено: теоретический анализ устойчивости семейства схем типа предиктор-корректор, на основе которого была выбрана схема для последующего внедрения в модель ПЛАВ; внедрение данной схемы в модель атмосферы ПЛАВ; проведены численные тесты новой схемы, показывающие заметное увеличение допустимой величины шага интегрирования по времени.

1. Блок динамики модели ПЛАВ

В этом разделе приведено краткое описание методов дискретизации по времени уравнений в блоке динамики модели общей циркуляции атмосферы ПЛАВ. Более подробное описание приводится, например, в [2].

Блок динамики модели атмосферы ПЛАВ представляет собой решение системы уравнений вида:

$$\frac{d\psi}{dt} = A(\psi), \quad (1)$$

где ψ – вектор основных прогностических величин; A – некоторый оператор; под $\frac{d}{dt}$ здесь и далее понимается полная Лагранжева производная вдоль траектории:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla), \quad (2)$$

где \vec{V} – вектор скорости. Оператор A может быть представлен в виде суммы двух операторов L и N :

$$\frac{d\psi}{dt} = L(\psi) + N(\psi), \quad (3)$$

где L – линейный оператор, отвечающий в том числе за распространение «быстрых» инерционно-гравитационных волн; N – нелинейный оператор, отвечающий за «медленные» физические процессы. Выбор шага по времени, таким образом, диктуется в первую очередь устойчивостью быстрых процессов и определяется условием Куранта. Отсюда возникает идея использовать для аппроксимации линейного оператора некоторый неявный подход, а нелинейную часть уравнения интегрировать явно, что и характеризует полунеявность метода, используемого в модели ПЛАВ.

В дальнейшем нам будет удобно рассматривать и анализировать различные способы дискретизации уравнений отдельно для линейной и нелинейной части.

В модели атмосферы ПЛАВ для дискретизации линейного оператора применяется схема Кранка – Николсона:

$$\frac{\psi_A^{n+1} - \psi_D^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (L(\psi_A^{n+1}) + L(\psi_D^n)) \quad (4)$$

Индекс D используется для определения переменных в точках начала траекторий $r_D = r(t)$, индикатор A определяет координаты конечных точек траекторий $r_A = r(t + \Delta t)$, находящихся в узлах фиксированной сетки. Схема Кранка – Николсона является абсолютно устойчивой схемой второго порядка аппроксимации по времени.

Для дискретизации нелинейной части применяется схема SETTLS [7]:

$$\frac{\psi_A^{n+1} - \psi_D^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} ([2N^n - N^{n-1}]_D + N_A^n) \quad (5)$$

Под N_α^β понимается $N(\psi_\alpha^\beta)$. Слагаемое $[2N^n - N^{n-1}]$ – экстраполяция по времени величин на слой $(n+1)$. Такая схема соответствует аппроксимации с помощью метода трапеций, где вместо значения переменной на слое $(n+1)$ используется их некоторая оценка, в данном конкретном случае – экстраполяция по времени.

Помимо этого, использование полулагранжева метода требует на каждом шаге по времени выполнять поиск траекторий частиц, т.е. координат точек частиц, которые придут в узлы сетки на следующем шаге по времени. Для этого требуется выполнять поиск исходных точек характеристик, заканчивающихся в точках $(x_A, t + \Delta t)$. Рассмотрим этот вопрос на примере одномерного случая. Запишем уравнение характеристик:

$$\frac{dx}{dt} = V. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) может быть представлено в виде:

$$x_A = x_D + \Delta t \cdot V(t + \Delta t, x_A) - \int_t^{t+\Delta t} \tau R d\tau, \quad (7)$$

$$\frac{dV}{dt} = R.$$

Можно переписать уравнение (7) в виде:

$$x_A = x_D + \int_t^{t+\Delta t} (V(t + \Delta t, x_A) - R\tau) d\tau. \quad (8)$$

После чего перейти к дискретному уравнению:

$$x_D = x_A - \tilde{V}\Delta t, \quad (9)$$

где $\tilde{V}\Delta t$ – это некоторая аппроксимация интеграла в уравнении (8). Полученное дискретное уравнение (9) нелинейно, т.к. в общем случае аппроксимация интеграла зависит от начальной точки траектории. Для решения уравнения (9) традиционно применяется итерационный подход:

$$x_D^l = x_A - \tilde{V}^{l-1}\Delta t, \quad V^0 = V(t, x_A), \quad (10)$$

где l – номер итерации. В модели атмосферы ПЛАВ используется аппроксимация уравнения (9):

$$x_D = x_A - \frac{\Delta t}{2} ([2V^n - V^{n-1}]_D + V_A^n) \quad (11)$$

Как было показано в [7], такая аппроксимация фактически равносильна предположению о том, что среднее ускорение вдоль Лагранжевой траектории на n -ом шаге по времени равно среднему ускорению на $(n-1)$ -ом шаге.

Как уже было сказано выше, применение данного подхода не позволяет использовать в модели ПЛАВ высокого пространственного разрешения достаточно большие шаги по времени. Одним из возможных способов повышения допустимой величины шага интегрирования модели является применение итерационных методов типа предиктор-корректор, рассмотрению которых посвящен следующий раздел.

2. Схемы типа предиктор-корректор и их анализ

Суть метода предиктор-корректор заключается в выполнении шага предиктора (их может быть несколько), а затем уточнении полученного решения на стадии шага корректора. Применение схем такого типа в полунявном полулагранжевом методе позволяет избавиться от использования экстраполяции по времени скоростей и нелинейных слагаемых. Также полученная аппроксимация уравнений становится более неявной.

2.1. Описание метода

Ограничимся двухслойными схемами по времени, где шаг корректора выполняется на основе метода трапеций.

Опишем итерационный процесс в общем виде. Сначала выполняется шаг предиктора:

$$\frac{\psi^* - \psi_D^n}{\Delta t} = \Theta(N(\psi^n), N(\psi^{n-1})), \quad (12)$$

где $\Theta(N(\psi^n), N(\psi^{n-1}))$ – это некоторая явная аппроксимация нелинейного слагаемого, которая может быть записана в довольно общем виде:

$$\Theta(N(\psi)) = a_1 N_A^n + a_2 N_A^{n-1} + a_3 N_D^n + a_4 N_D^{n-1}. \quad (13)$$

Затем следует шаг корректора, использующий метод трапеций:

$$\frac{\psi_A^{n+1} - \psi_D^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} (N(\psi^*) + N_D^n) \quad (14)$$

Перед тем как переходить к анализу полученной схемы, введем в рассмотрение семейство схем второго порядка аппроксимации, построенных на шаблоне (13). Для этого воспользуемся теоремой, доказанной в [6].

Согласно этой теореме все дискретизации уравнения (3) вида:

$$\begin{aligned} \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} = & \frac{3}{4} (N_A^n + N_D^n) - \frac{1}{4} (N_A^{n-1} + N_D^{n-1}) + \\ & + \alpha (-N_A^n + N_A^{n-1} + N_D^n - N_D^{n-1}) + \frac{1}{2} (L_A^{n+1} + L_D^n) \end{aligned} \quad (15)$$

имеют второй порядок аппроксимации для любого значения параметра α . Отметим что значение $\alpha = 0,25$ соответствует схеме SETTLS, применяемой на данный момент в модели ПЛАВ.

Далее нас будет интересовать, каким образом меняются свойства схемы предиктор-корректор в зависимости от выбора параметров шага предиктора. Выбор оптимальной схемы, основанной на дискретизации (15), должен производиться из соображений максимизации области устойчивости.

2.2. Анализ устойчивости

Анализ устойчивости схем будем проводить, следуя предложенной в [4] идее, используя автомодельное одномерное уравнение переноса:

$$\frac{d\psi}{dt} = \sigma\psi, \quad (16)$$

где $\sigma = \lambda + i\omega$, $(\lambda, \omega) \in \mathbb{R}^2$. Скорость переноса U считаем постоянной:

$$\frac{d\psi}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi = \sigma \psi. \quad (17)$$

Точное решение данного уравнения для любого начального распределения $\psi(x,0) = f(x)$ задается:

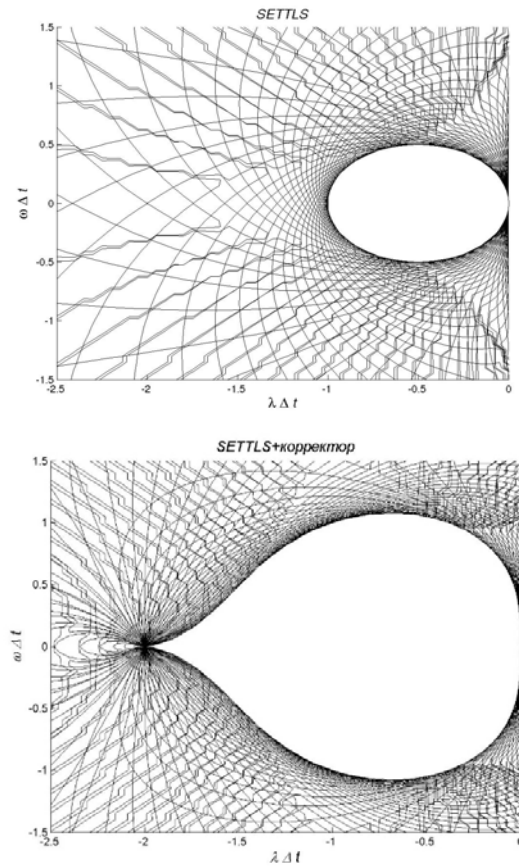
$$\psi(x,t) = f(x - Ut) e^{\sigma t}. \quad (18)$$

Воспользуемся спектральным признаком устойчивости, рассматривая решения при $\lambda \leq 0$. Подставляя единичную Фурье-гармонику $\psi_j^n = A_k^n e^{ikj\Delta x}$ в уравнение (15), дискретизованное при помощи схемы предиктор-корректор, получим уравнение для коэффициента усиления A :

$$A^2 - A \left(e^{-iks} \left(1 + \gamma + \left(\frac{3}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) \gamma^2 \right) + \gamma^2 \left(\frac{3}{8} - \frac{\alpha}{2} \right) \right) + e^{-iks} \gamma^2 \left(\frac{1}{8} + \frac{\alpha}{2} \right) + \gamma^2 \left(\frac{1}{8} - \frac{\alpha}{2} \right) = 0. \quad (19)$$

Здесь $\gamma = \sigma \Delta t$, $s = x_A - x_D$. Разрешая данное уравнение относительно A , можно получить два корня: один – отвечающий физической моде, другой – вычислительной. Для изучения свойств устойчивости данной схемы изобразим модули корней (19) в плоскости $\lambda \Delta t - \omega \Delta t$ при различных значениях числа Куранта. Нас интересует область абсолютной устойчивости схемы – множество точек (λ, ω) , для которых $|A| \leq 1$ при любом значении числа Куранта.

Было получено, что максимальная площадь области абсолютной устойчивости достигается при $\alpha = 0,25$, что, как уже отмечалось выше, соответствует использованию схемы SETTLS в шаге предиктора. Данный результат был получен численно, путем сравнения при различных значениях параметра α области абсолютной устойчивости (α менялся с шагом 0,01). На рис. 1 изображены область абсолютной устойчивости для схемы SETTLS (данный результат уже был получен в [7]) и для схемы SETTLS с шагом корректора.



**Рис. 1. Область абсолютной устойчивости (белая область графика):
схема SETTLS и SETTLS с шагом корректора.**

Таким образом, на примере одномерного автомодельного уравнения переноса показано, что схема предиктор-корректор со схемой SETTLS в шаге предиктора дает наибольшую область устойчивости среди рассмотренного семейства схем. Кроме этого, область устойчивости новой схемы значительно больше, чем у схемы SETTLS. Перейдем теперь к численному анализу полученной схемы.

3. Результаты численных экспериментов

Тестирование проводится на оперативной версии модели ПЛАВ с горизонтальным разрешением $0,9^\circ \times 0,72^\circ$ и 28 уровнями по вертикали. Опишем стратегию проведения численных тестов. Сначала будем искать конфигурацию модели для различных начальных данных, при которой стандартная схема SETTLS демонстрирует признаки развития локальных осцилляций. Затем будем проверять работоспособность новой схемы в этих же условиях. Численный анализ проводится на примере двух тестов: первый – академический тест «бароклинная волна» [3], второй – серия прогнозов погоды на 72 часа по реальным начальным данным.

3.1. Бароклинная волна

Подробное описание теста можно найти в [3]. В начальный момент времени атмосфера находится в состоянии равновесия с симметричным зональным полем скорости ветра. В поле скорости ветра вносится возмущение с центром в $\lambda_c, \varphi_c = (\frac{\pi}{9}, \frac{2\pi}{9})$, задаваемое формулой:

$$u_{pert}(\lambda, \varphi) = u_p e^{-\left(\frac{r}{R}\right)^2}. \quad (20)$$

Здесь $R = \frac{a}{10}$; $u_p = 1$ м/с, где a – это средний радиус Земли.

Изображения профилей начальных данных приведено в [3] на рис. 1.

Развитие бароклинной волны становится интенсивным после четвертых суток модельного времени и сопровождается большой амплитудой нелинейных слагаемых. Тест проводится с шагом по времени $\Delta t = 2400$ с при различных значениях коэффициентов диффузии вертикальной компоненты абсолютной завихренности, дивергенции и температуры.

Для подавления коротковолновой части спектра, возникающей из-за нелинейного взаимодействия, в модели ПЛАВ используется

дополнительное сглаживание решения с помощью бигармонического оператора [2]. Для некоторой функции ψ такое сглаживание записывается в виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + K \nabla^4 \psi = 0, \quad (21)$$

где K – коэффициент сглаживания.

Будем искать такие значения коэффициентов сглаживания, при которых стандартная схема SETTLS теряет устойчивость.

На рис. 2 изображено поле приземного давления на 120-й час модельного времени для модели со стандартной схемой и схемой предиктор-корректор. $K = 0,5 \cdot 10^{15} \text{ м}^4/\text{с}$.

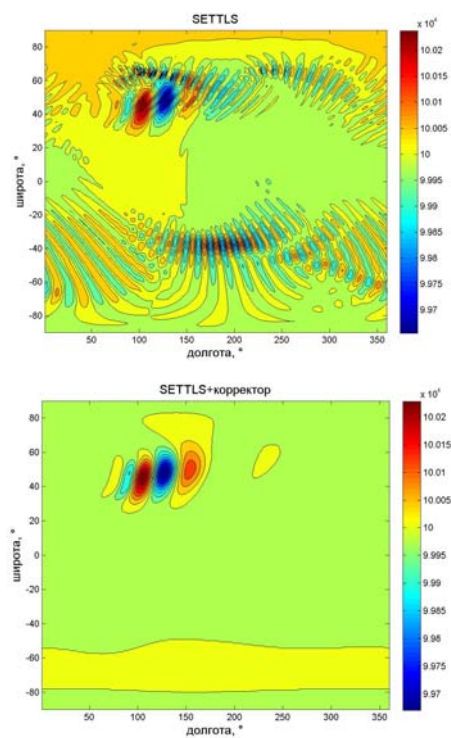


Рис. 2. Поле приземного давления, Па. T=120 ч, тест «бароклинная волна», схема SETTLS и SETTLS с шагом корректора.

Видно, что в случае схемы SETTLS в решении появляются ложные осцилляции, связанные с развитием неустойчивости, в то время как схема предиктор-корректор показывает устойчивое решение.

Однако стоит проверить, не связана ли устойчивость решения с внесением схемой дополнительной численной диссипации. Для этого можно, например, рассмотреть поле относительной завихренности скорости на девятые сутки модельного времени на уровне 850 мбар в тесте «бароклиническая волна» (с коэффициентами сглаживания, обеспечивающими отсутствие ложных осцилляций в решении). Практика показывает, что при внесении дополнительной диссипации в решение это поле становится менее детализированным и вихри получают меньшее развитие. Таким образом, сравнивая поля относительной завихренности скорости, можно получить базовое представление о внесении численной вязкости новой схемой. На рис. 3 изображено поле относительной завихренности скорости на 216-й час модельного времени на уровне 850 мбар для схемы SETTLS и схемы предиктор-корректор. Заметного отличия в степени развитости вихрей и описании максимумов между схемой SETTLS и схемой предиктор-корректор не наблюдается.

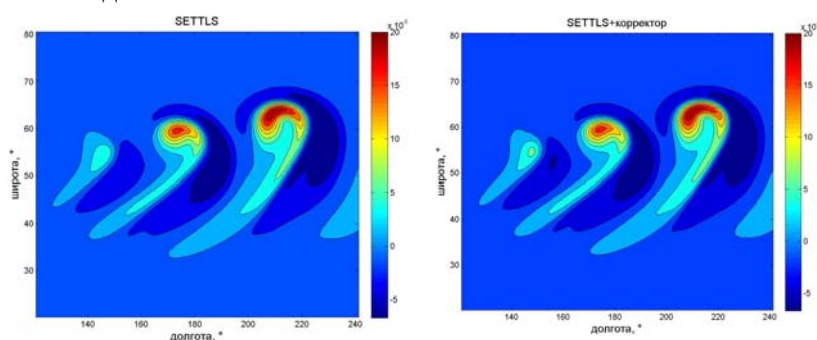


Рис. 3. Поле относительной завихренности скорости, 1/с. T=216 ч, тест «бароклиническая волна», схема SETTLS и SETTLS с шагом корректора

Таким образом, тест «бароклиническая волна» показал, что новая схема является более устойчивой по сравнению со схемой SETTLS

и не вносит существенной численной вязкости в решение.

3.2. Прогноз на 72 часа

В данном разделе нас будет интересовать влияние предложенной схемы на качество прогноза, а именно: будем сравнивать градиентную ошибку (S_1) для поля геопотенциала на уровне 250 мбар и поля давления над уровнем моря. Градиентная ошибка определяется как [1]:

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^n w_i (e_g)_i}{\sum_{i=1}^n w_i (G_L)_i}, \quad (22)$$

где $w_i = \cos \phi_i$ – косинус широты в узле сетки i ,

$$e_g = \left(\left| \frac{\partial}{\partial x} (x_f - x_v) \right| + \left| \frac{\partial}{\partial y} (x_f - x_v) \right| \right), \quad (23)$$

$$G_L = \max \left(\left| \frac{\partial x_f}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial x_v}{\partial x} \right| \right) + \max \left(\left| \frac{\partial x_f}{\partial y} \right|, \left| \frac{\partial x_v}{\partial y} \right| \right), \quad (24)$$

x_f и x_v – соответственно, прогнозируемое и фактическое значения. Градиентная ошибка характеризует качество воспроизведения горизонтальных градиентов полей и является одной из самых важных метрик ошибки для оценки качества прогнозов. Существенными для градиентной ошибки являются изменения порядка сотых в оценках.

Была посчитана серия из 31 численного прогноза погоды с заблаговременностью 72 часа. В качестве начальных данных использовались объективные анализы Гидрометцентра России на срок 12 ч ВСВ соответствующего дня в промежутке от 1 до 31 января 2014 года.

Сравниваются осредненные оценки качества прогноза для модели со схемой SETTLS и со схемой предиктор-корректор для различных регионов. Регионы для верификации прогнозов определены следующим образом: Европа – 1–50° з.д., 35–70° с.ш.; Север – все долготы, 20–90° с.ш.; Юг – все долготы, 20–90° ю.ш.; Тропики

– все долготы, 20° ю.ш. – 20° с.ш.; Гималаи – 60° з.д. – 120° з.д., 10–40° с.ш. Для выполнения прогнозов используется оперативная версия модели с шагом по времени $\Delta t = 2400$ с. Сравнение прогнозов приведено в табл. 1 и 2.

Таблица 1

**Градиентная ошибка для поля геопотенциала 250 мбар.
Осредненные оценки за январь 2014 г., численный прогноз погоды
с заблаговременностью 72 ч**

	Европа	Север	Юг	Тропики	Гималаи
SETTLS	0,323	0,238	0,283	0,632	0,234
Предиктор-корректор	0,320	0,236	0,275	0,519	0,198

Таблица 2

**Градиентная ошибка для поля давления на уровне моря.
Осредненные оценки за январь 2014 г., численный прогноз
с заблаговременностью 72 ч**

	Европа	Север	Юг	Тропики	Гималаи
SETTLS	0,378	0,427	0,443	0,625	0,560
Предиктор-корректор	0,379	0,423	0,435	0,490	0,501

Из табл. 1 и 2 видно, что изменений в регионах Европа и Север не наблюдается, однако статистически значимо изменение градиентной ошибки для полей геопотенциала и давления над уровнем моря в регионах Юг, Тропики и Гималаи.

Чтобы понять причину улучшения прогнозов, можно поступить следующим образом: рассмотреть одиночные оценки прогнозов для различных дней, выделить день или серию дней, в которых видно улучшение оценок, и посмотреть разницу полей.

Рассмотрим регион Гималаи. В табл. 3 приведена градиентная ошибка прогноза на 72 часа по начальным данным 2 января 2014 г. для поля геопотенциала на уровне 250 и 850 мбар для схемы

SETTLS и схемы предиктор-корректор. На рис. 4 изображено поле геопотенциала на уровне 850 мбар для обеих схем.

Таблица 3

Градиентная ошибка для поля геопотенциала в регионе Гималаи. T=72 ч, начальные данные 12 ч ВСВ 02.01.2014 г.

	250 мбар	850 мбар
SETTLS	0,273	0,696
Предиктор-корректор	0,212	0,548

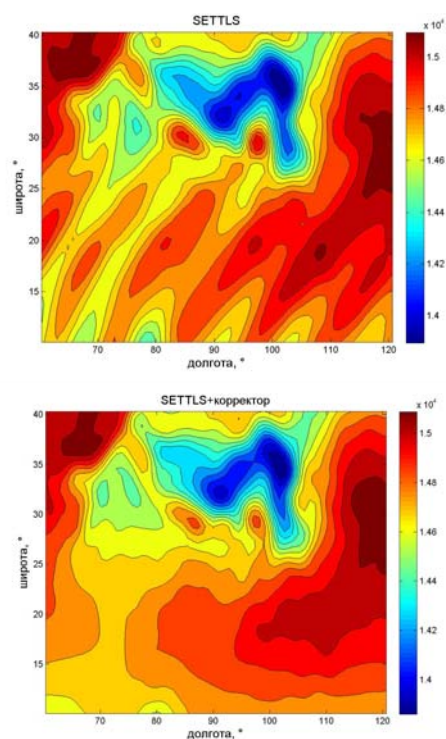


Рис. 4. Поле геопотенциала на уровне 850 мбар, m^2/c^2 .
Схема SETTLS и SETTLS с шагом корректора.
T=72 ч от начальных данных 12 ч ВСВ 02.01.2014 г.

На рис. 4 видно присутствие ложных осцилляций при использовании схемы SETTLS. В результате применения новой схемы данные осцилляции пропадают, что приводит к уменьшению градиентной ошибки прогноза.

Заключение

В данной работе был проведен теоретический анализ однопараметрического семейства схем типа предиктор-корректор, используя признак фон Неймана. На основе этого анализа была выделена оптимальная с точки зрения максимизации устойчивости схема. Область абсолютной устойчивости полученной схемы существенно больше, чем у схемы SETTLS, применяемой в модели ПЛАВ. Новая схема была внедрена в модель общей циркуляции атмосферы ПЛАВ. Проведен численный анализ схемы на примере двух тестов: «бароклинная волна» и численный прогноз погоды на 72 часа. Численный анализ показал, что применение новой схемы позволяет заметно увеличить предел устойчивости схемы, что позволяет получать более качественный прогноз при больших шагах по времени и уменьшенных коэффициентах диффузии модели.

Описанные выше результаты дают основания полагать, что применение полученной схемы в модели ПЛАВ высокого разрешения может позволить использовать большие шаги по времени, тем самым увеличив её экономичность в смысле затраченного вычислительного времени и сохранив качество воспроизведения динамики атмосферы.

В дальнейшем планируется проведение тестов на модели ПЛАВ высокого пространственного разрешения. Возможны исследования других, более сложных формулировок метода предиктор-корректор. Также интересным было бы тестирование данной схемы в негидростатической версии модели атмосферы, разрабатываемой на данный момент Р.Ю. Фадеевым [5], где вопрос устойчивости схемы интегрирования по времени стоит гораздо острее, чем в гидростатических моделях.

Автор выражает благодарность руководителю научной работы д.ф.-м.н. М.А. Толстых за ряд важных замечаний, сделанных по ходу написания данной статьи, а также к.ф.-м.н. В.В. Шашкину и

Р.Ю. Фадееву за полезные обсуждения и советы по тестированию и отладке новой схемы.

Работа выполнена в ИВМ РАН при поддержке гранта РФФИ 14-27-00126.

Список использованных источников

1. Наставление по Глобальной системе обработки данных и прогнозирования. Том 1 // В МО-№ 485. – 2010. – http://www.wmo.int/pages/prog/www/DPFS/documents/485_Vol_I_ru.pdf
2. Толстых М.А. Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. – М.; Обнинск: ОАО ФОП, 2010. – 111 с.
3. Jablonowski C., Lauritzen P., Nair R., Taylor M. Idealized test cases for the dynamical cores of Atmospheric General Circulation Models // A proposal for the NCAR ASP 2008 summer colloquium. – http://www.cgd.ucar.edu/cms/pel/asp2008/idealized_testcases.pdf
4. Durran D.R. Numerical Methods for Fluid Dynamics: With Application to Geophysics (2nd ed. // Texts in Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 32, Springer. – 516 p.
5. Fadeev R.Yu., Tolstykh M.A. Non-hydrostatic dynamical core for the Russian SL-AV model: overview and first results // Abstract book of World Weather Open Science Conference, Montreal, Canada, 15-24 august 2014. – P. 534. – <http://wwosc2014.org/pdf/20140825-WWOSC-FinalBookofAbstracts.pdf>
6. Gospodinov I.G., Spiridonov V.G., Geleyn J.-F. Second-order accuracy of two-time-level semi-Lagrangian schemes // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. – 2001. – Vol. 127. – P. 1017–1033.
7. Hortal M. The developing and testing of a new two-time-level semi-Lagrangian scheme (SETTLS) in the ECMWF forecast model // Quart. J. Roy. Meteor. Soc. – 2002. – Vol. 128. – P. 1671–1688.
8. Mesinger F., Arakawa A. Numerical methods used in atmospheric models. Vol. 2 / пер. с англ. В.П. Садокова. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 136 с.
9. Robert A. A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations // Atmos.-Ocean. – 1981. – Vol. 19. – P. 35–46.
10. Staniforth, A., Côté J. Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models - A review // Mon. Wea. Rev. – 1991. – Vol. 119. – P. 2206–2223.

Поступила в редакцию 18.08.2015 г.