

# ЛОКАЛЬНО-КОНСЕРВАТИВНЫЙ ПОЛУЛАГРАНЖЕВ АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НА СФЕРЕ В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ, В Z-СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ПО ВЕРТИКАЛИ

*В.В. Шашкин*

*Институт вычислительной математики РАН  
Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации  
vvshashkin@gmail.com*

## **Введение**

Одним из наиболее популярных подходов к решению уравнений гидротермодинамики атмосферы в моделях общей циркуляции является полулагранжев метод описания адвекции в совокупности с полуявной схемой интегрирования по времени. Основным преимуществом такого подхода является возможность моделирования атмосферы с шагом по времени до 5 раз большим, чем при использовании явной схемы или эйлера подхода к описанию адвекции. Сочетание полулагранжева метода и полуявной схемы было впервые реализовано А. Робером в 1982 году [9] и, благодаря своей вычислительной эффективности, до сих пор используется в большинстве оперативных моделей атмосферы.

Однако полулагранжев метод описания адвекции обладает существенными недостатками, прежде всего, это отсутствие монотонности и локальной консервативности. Отсутствие локальной консервативности при численном решении уравнения переноса приводит к тому, что возникают ложные источники и стоки массы переносимой величины. При переносе водяного пара и гидрометеоров в модели общей циркуляции атмосферы это может приводить к возникновению ложных осадков [10]. Кроме того, отсутствие локальной консервативности не позволяет корректно описывать эволюцию пространственного распределения озона и других малых газовых составляющих атмосферы, которые оказывают значительное влияние на климат.

При использовании полулагранжева метода для дискретизации уравнений динамики, из-за отсутствия локального и глобального сохранения массы, при интегрировании на длительные временные интервалы (сезонный прогноз или моделирование климата) масса атмосферы может существенно измениться. Для решения этой проблемы традиционно применяются апостериорные корректоры массы [8], которые позволяют достичь ее

глобального сохранения, но только усугубляют проблемы, связанные с отсутствием локальной консервативности (например, ложные осадки).

Работы по созданию локально-консервативных полулагранжевых схем численного решения уравнения переноса для моделей общей циркуляции атмосферы и моделей атмосферной химии ведутся в нескольких мировых прогностических центрах. В NCAR (National Center for Atmospheric Research, США) была разработана схема численного решения двумерного уравнения переноса на плоской сфере на сетке с квазиравномерным разрешением «кубическая сфера» [4], в настоящее время ведутся работы по интеграции этой схемы в глобальную модель CAM SE для расчета переноса в блоке атмосферной химии. В UK MO (United Kingdom Meteorological Office, Великобритания) были разработаны вычислительно эффективные двумерная [12] и трехмерная [13] локально-консервативные полулагранжевы схемы численного решения уравнения переноса на сфере на регулярной широтно-долготной сетке.

В Гидрометцентре России и ИВМ РАН в рамках работ по модернизации полулагранжевой модели общей циркуляции атмосферы ПЛАВ [1] разрабатываются локально-консервативный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса и версия динамического блока модели, сохраняющая массу. В качестве основы для создания численных методов, сохраняющих массу, был взят конечно-объемный полулагранжев подход [5]. На данный момент реализованы двумерный локально-консервативный алгоритм решения уравнения переноса на сфере и модель мелкой воды на сфере, сохраняющая массу (двумерная версия динамического блока модели ПЛАВ) [11]. Разработанные алгоритмы могут применяться на регулярных и редуцированных широтно-долготных сетках.

В данной статье представлены результаты работы по созданию локально-консервативного полулагранжева алгоритма численного решения уравнения переноса на сфере в трехмерном случае. В разделе 1 данной статьи описываются основы конечно-объемного полулагранжева подхода к численному решению уравнения переноса (на примере одномерного уравнения переноса), раздел 2 кратко описывает устройство конечно-объемных полулагранжевых схем в двумерном и трехмерном пространстве, разделы 3 и 4 посвящены подробному описанию разработанной схемы, раздел 5 – описанию результатов численных экспериментов.

## 1. Конечно-объемный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса в одномерном случае

Рассмотрим одномерное уравнение переноса на отрезке  $x \in [0,1]$  с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \\ q(x=0) &= q(x=1), \\ u(x=0) &= u(x=1),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $q$  – концентрация переносимой величины (масса переносимой величины, приходящаяся на единицу массы жидкости);  $u$  – скорость потока. Можно также рассмотреть уравнение неразрывности для плотности жидкости  $\rho$ :

$$\frac{d\rho}{dt} + D\rho = 0,\tag{2}$$

здесь  $D = \frac{\partial u}{\partial x}$  – дивергенция потока. Используя (1) и (2), можно вывести уравнение для плотности переносимой величины  $f = \rho q$  (масса переносимой величины на единицу объема жидкости):

$$\frac{df}{dt} + Df = 0.\tag{3}$$

Уравнение (3) можно представить в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta A(t)} f \cdot dx = 0,\tag{4}$$

где  $\delta A(t)$  – произвольный объем, передвигающийся вместе с жидкостью (т.н. «жидкий объем»). Физический смысл уравнения (4) заключается в том, что масса переносимой величины, заключенная в жидком объеме, не меняется со временем. Уравнение (4) является основным для построения численных схем, основанных на конечно-объемном полулагранжевом подходе.

Предположим, что отрезок  $[0, 1]$  разделен на  $N$  ячеек  $A_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$ ,  $i \in 1, N$ ,  $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  – длина ячейки  $A_i$ . Пусть положение некоторой частицы, передвигающейся вместе с жидкостью, на шаге по времени  $t^{n+1}$ , соответствует точке сетки

$x_{i+1/2}$ , положение этой же частицы на шаге по времени  $t^n$  будет обозначено  $x_{i+1/2}^*$ . Точка  $x_{i+1/2}^*$  называется исходной точкой обратной траектории с конечной точкой  $x_{i+1/2}$ . В конечно-объемных полулагранжевых методах, важную роль играет так же понятие исходного объема  $A_i^* = (x_{i-1/2}^*, x_{i+1/2}^*)$ .

Из уравнения сохранения массы (4) следует, что:

$$\bar{f}_i^{n+1} \cdot \Delta x_i = m^n(A_i^*), \quad (5)$$

где  $\bar{f}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{A_i} f(x, t^{n+1}) dx$  – среднее значение плотности переносимой величины по ячейке  $A_i$ , а  $m^n(A_i^*) = \int_{A_i^*} f(x, t^n) dx$  – масса переносимой величины, заключенная в исходной ячейке  $A_i^*$ . Следует отметить, что до настоящего момента все выкладки были проведены с аналитической точностью.

Конечно-объемные методы традиционно оперируют значениями величин усредненными по ячейкам вычислительной сетки. Таким образом, задача численного решения уравнения переноса заключается в том, что бы найти средние значения плотности переносимой величины на слое по времени  $n+1$   $\bar{f}_i^{n+1}$  по известным средним значениям  $\bar{f}_i^n$ , при этом, скорость потока  $u(x_i, t^n)$  считается известной.

В силу уравнения (5), исходная задача делится на две подзадачи:

(1) Восстановить форму исходных объемов  $A_i^*$  – т.е. найти координаты исходных точек  $x_{i+1/2}^*$ ,  $i \in 1, N$ .

(2) Найти массу переносимой величины  $m^n(A_i^*)$ , заключенную в каждой из исходных ячеек  $A_i^*$ , т.е. вычислить интегралы  $\int_{A_i^*} f(x, t^n) dx$ . При этом  $\bar{f}_i^{n+1} = m^n(A_i^*) / \Delta x_i$ .

Подзадача (1) – является традиционной для всех полулагранжевых алгоритмов, и методы ее решения подробно описаны в литературе, хороший обзор приведен, например, в [1]. Подзадача (2) – является аналогом интерполяции, применяемой в традиционных полулагранжевых методах, но рассматривает при этом не точки, а отрезки, и при достаточно очевидных требованиях к аппроксимации интегралов обеспечивает сохранение массы.

Для аппроксимации интегралов по исходным ячейкам с высоким порядком точности применяется процедура восстановления подсеточного распределения плотности переносимой величины. Различные методы восстановления подсеточного распределения и их применение в конечно-объемных полулагранжевых методах описаны в [7]. Наибольшей популярностью пользуется кусочно-параболический метод [2]. В этом методе функция плотности  $f(x, t)$  аппроксимируется на отрезке  $A_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2})$  параболической функцией  $h_i(x)$ , на которую накладываются следующие требования:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} h_i(x) dx = \bar{f}_i \Delta x_i,$$

$$h_i(x_{i-1/2}) = h_L, \quad h_i(x_{i+1/2}) = h_R,$$

здесь  $h_L$  и  $h_R$  – значения функции  $f(x, t)$  на левой и правой границах отрезка  $A_i$  – определяются с помощью интерполяции [2]. В нормализованной координате

$\xi = \frac{x - x_{i-1/2}}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} - \frac{1}{2}$  функция  $h_i(\xi)$  задается следующим выражением:

$$h_i(\xi) = \bar{f}_i + (h_R - h_L)\xi + (6\bar{f}_i - 3(h_R + h_L))\left(\frac{1}{12} - \xi^2\right).$$

Таким образом, если, например,  $x_{i-1/2}^* \in (x_{j-1/2}, x_{j+1/2})$ , а  $x_{i+1/2}^* \in (x_{k-1/2}, x_{k+1/2})$  и  $k > j + 1$ , то с четвертым порядком точности:

$$m^n(A_i^*) = \int_{x_{i-1/2}^*}^{x_{i+1/2}^*} f(x, t^n) dx = \int_{x_{i-1/2}^*}^{x_{j+1/2}} h_j(x) dx + \sum_{l=j+1}^{k-1} \bar{f}_l \Delta x_l + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{i+1/2}^*} h_k(x) dx =$$

$$= \sum_{l=j}^{k-1} \bar{f}_l \Delta x_l - \int_{x_{j-1/2}}^{x_{i-1/2}^*} h_j(x) dx + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{i+1/2}^*} h_k(x) dx.$$

Очевидно, что при таком задании  $m^n(A_i^*)$  и при выполнении условия  $x_{i-1/2}^* \leq x_{i+1/2}^*$  для любого  $i$ ,  $\sum_{i=1, N} \bar{f}_i^{n+1} \Delta x_i = \sum_{i=1, N} m^n(A_i^*) = \sum_{i=1, N} \bar{f}_i^n \Delta x_i$ , т.е. масса сохраняется.

## 2. Конечно-объемные полулагранжевы методы численного решения уравнения переноса в случае двух и трех пространственных измерений

В случае большего количества пространственных измерений (двухмерное или трехмерное пространство) уравнение сохранения массы в жидком объеме (4) остается верным (с учетом того, что жидкий объем теперь не отрезок, а некоторая плоская или объемная фигура). Конечно-объемные полулагранжевы методы численного решения уравнения переноса в двухмерном и трехмерном случаях (также как и в одномерном) состоят из двух этапов – восстановление формы исходных объемов и вычисление заключенной в них массы. Однако теперь исходные объемы являются фигурами (плоскими или объемными соответственно) достаточно произвольной формы, и производить интегрирование плотности с использованием точной геометрии весьма проблематично. В двумерном случае наиболее продуктивным подходом является аппроксимация исходных объемов полигонами со сторонами параллельными координатным осям. Логичным обобщением этого подхода на трехмерный случай является аппроксимация исходного объема многогранником с гранями параллельными координатным плоскостям (см. рис. 1).

Аппроксимирующий многогранник может быть построен различными способами. Существуют варианты построения такого многогранника, которые позволяют избежать вычисления многомерных (двумерных или трехмерных) интегралов плотности переносимой величины, сведя их к последовательному вычислению нескольких одномерных (в разных пространственных направлениях). Схемы, использующие подобные подходы к построению аппроксимирующих многогранников, называются каскадными и впервые были предложены в работах [6] и [12] (в двумерном случае), схема, представленная в последней работе, была также реализована и в трехмерном случае [13]. При использовании каскадного подхода не требуется восстанавливать двух или трехмерное подсеточное распределение плотности переносимой величины, что позволяет значительно сократить объем вычислений.

### **3. Каскадный подход к вычислению масс, заключенных в исходных объемах**

Процесс вычисления масс переносимой величины, заключенных в исходных объемах, можно рассматривать как перераспределение массы с регулярной вычислительной сетки на нерегулярную сетку исходных объемов. При использовании прямого подхода задача требует вычисления трехмерных интегралов и, соответственно, восстановления трехмерных подсеточных распределений плотности переносимой величины, что вычислительно не эффективно. В данной работе для построения локально-консервативного алгоритма был использован каскадный подход.

Идея каскадного подхода к задаче вычисления масс, заключенных в исходных объемах, состоит в том, чтобы производить перераспределение массы переносимой величины в несколько этапов: сначала масса перераспределяется с вычислительной сетки на некоторую вспомогательную сетку «А», затем на другую вспомогательную сетку «Б», и только после этого на сетку исходных объемов. Вспомогательные сетки «А» и «Б» конструируются таким образом, что ячейки сетки «А» отличаются от ячеек вычислительной сетки только в направлении  $y$ , ячейки сетки «Б» отличаются от ячеек сетки «А» только в направлении  $z$ , а многогранники, аппроксимирующие исходные объемы, отличаются от ячеек сетки «Б» только в направлении  $x$ . Такой способ построения вспомогательных сеток приводит к тому, что все три перераспределения массы становятся одномерными и, соответственно, требуют вычисления только одномерных интегралов и восстановления одномерных распределений плотности. Способ построения вспомогательных сеток, используемый в данной работе, описан в разделе 4.

#### 4. Построение вспомогательных сеток в трехмерном пространстве в декартовой геометрии

Пусть в трехмерной вычислительной области введена сетка с ячейками  $A_{ijk} = (x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}) \times (z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$ ,  $x_{i+\frac{1}{2}} = (i + \frac{1}{2}) \cdot \Delta x$ ,  $y_{j+\frac{1}{2}} = (j + \frac{1}{2}) \cdot \Delta y$ ,  $z_{k+\frac{1}{2}} = (k + \frac{1}{2}) \cdot \Delta z$ ,  $i \in [1, N]$ ,  $j \in [1, M]$ ,  $k \in [1, L]$ . Для простоты сетка подразумевается равномерной, хотя каскадная схема может быть реализована и на неравномерной сетке.

Для удобства описания процедуры построения вспомогательных сеток необходимо ввести следующие обозначения:  $A_{ijk}^*$  – исходный объем, соответствующий ячейке сетки  $A_{ijk}$ , точка  $a_{ijk} = (x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}})$  – верхний северо-восточный угол ячейки  $A_{ijk}$ ,  $a_{ijk}^*$  – исходная точка траектории с конечной точкой  $a_{ijk}$ ,  $S_j^*$  – поверхность исходных точек траекторий с конечными точками, лежащим на плоскости постоянной широты  $y = y_{j+\frac{1}{2}}$ , т.е. поверхность, на которой лежат точки  $a_{I,J,K}^*$ , у которых  $I \in [1, N]$ ,  $K \in [1, L]$ , а индекс  $J$  фиксирован и равен  $j$ ,  $l_{j,k}^*$  – линия, состоящая из точек  $a_{I,J,K}^*$ ,  $I \in [1, N]$ ,  $K = k$ ,  $J = j$ .

*Построение вспомогательной сетки «А»*

Ячейки вспомогательной сетки «А» совпадают с ячейками вычислительной сетки по координатам  $x$  и  $z$ , т. е. ячейка вспомогательной сетки «А»  $I_{i,j,k}^A$ , как и ячейка  $A_{ijk}$ , ограничена сверху плоскостью  $z = z_{k+\frac{1}{2}}$ , снизу –  $z = z_{k-\frac{1}{2}}$ , с востока –  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  и с запада –  $x = x_{i-\frac{1}{2}}$  (см. рис. 2 лев.). Северная грань ячейки  $I_{i,j,k}^A$  параллельна координатной плоскости  $Oxz$ , ее  $y$ -координата определяется  $y$ -координатами точек пересечения поверхности  $S_j^*$  с линиями вычислительной сетки  $l_{i,k} = \{x = x_{i+\frac{1}{2}}, z = z_{k+\frac{1}{2}}\}$ ,  $l_{i-1,k} = \{x = x_{i-\frac{1}{2}}, z = z_{k+\frac{1}{2}}\}$ ,  $l_{i,k-1} = \{x = x_{i+\frac{1}{2}}, z = z_{k-\frac{1}{2}}\}$ ,  $l_{i-1,k-1} = \{x = x_{i-\frac{1}{2}}, z = z_{k-\frac{1}{2}}\}$  (см. рис. 2 прав.). Пусть ординаты точек пересечения  $S_j^*$  с  $l_{i,k}$ ,  $l_{i-1,k}$ ,  $l_{i,k-1}$ ,  $l_{i-1,k-1}$  равны, соответственно,  $y_{i,k,j}$ ,  $y_{i-1,k,j}$ ,  $y_{i,k-1,j}$ ,  $y_{i-1,k-1,j}$ , тогда ордината северной грани ячейки  $I_{i,j,k}^A$  равна  $\bar{y}_{i,k,j} = \frac{1}{4}(y_{i,k,j} + y_{i-1,k,j} + y_{i,k-1,j} + y_{i-1,k-1,j})$ . Южная грань  $I_{i,j,k}^A$  совпадает с северной гранью  $I_{i,j-1,k}^A$ .

Слой ячеек  $I_{i,j,k}^A$ , где  $i \in [1, N]$ ,  $k \in [1, L]$ , а  $j$  фиксировано аппроксимирует область между поверхностями  $S_j^*$  и  $S_{j-1}^*$ , т.е. слой исходных ячеек  $A_{i,j,k}^*$  с тем же выбором индексов. Кроме того, широтный ряд ячеек  $I_{i,J,K}^A$ ,  $I = i$ ,  $K = k$ ,  $J \in [1, M]$  совпадает с рядом ячеек  $A_{I,J,K}$ ,  $I = i$ ,  $K = k$ ,  $J \in [1, M]$ , и для вычисления масс, заключенных в них, можно использовать одномерный подход, изложенный в разделе 1. Перераспределение массы с вычислительной сетки на вспомогательную сетку «А» называется перераспределением в широтном направлении.

Ординаты точек пересечения  $S_j^*$  с линиями  $l_{i,k}$ ,  $l_{i-1,k}$ ,  $l_{i,k-1}$ ,  $l_{i-1,k-1}$  можно найти с помощью двумерной интерполяции с узлами в точках  $a_{ijk}^*$ , однако вычислительно эффективнее использовать каскадный подход и здесь, разбив двумерную интерполяцию на две одномерных. Например, нахождение ординат  $y_{i,k,j}$  пересечения поверхности  $S_j^*$  с линиями  $l_{i,k}$   $k = [1, L]$  состоит из двух этапов:



(1) с помощью одномерной интерполяции вычисляются координаты  $(y, z)$  точек пересечения линий  $l_{j,k}^*$ ,  $k \in [1, L]$  с плоскостью  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$  (точки  $b_{ijk}$  на рис. 3 лев.), т.е. фактически восстанавливается линия пересечения поверхности  $S_j^*$  с плоскостью  $x = x_{i+\frac{1}{2}}$ ;

(2) искомые ординаты вычисляются как ординаты пересечений линии, соединяющей точки  $b_{ijk}$ , с уровнями вычислительной сетки  $z_{k+\frac{1}{2}}$  (см. рис. 3 прав.). Здесь также используется одномерная кубическая интерполяция.

#### *Построение вспомогательной сетки «Б»*

Для того, чтобы процедура перераспределения массы между вспомогательными сетками «А» и «Б» была одномерной, необходимо, чтобы ячейки сетки «Б» совпадали с ячейками сетки «А» по двум из трех пространственных направлений. В схеме, представленной в настоящей работе, ячейки вспомогательных сеток «А» и «Б» совпадают по направлениям  $x$  и  $y$  (с учетом криволинейности сетки «А» по вертикали – см. рис. 4 лев.).

Верхние (нижние) грани ячеек сетки «Б» параллельны плоскости  $Oxz$ . Ячейка сетки «Б»  $I_{i,j,k}^B$  определяется как совокупность ячеек и частей ячеек  $i, j$ -ого столбца сетки «А»  $I_{i,j,k}^A$  (индексы  $i, j$  фиксированы, индекс  $k$  может варьироваться), лежащих между плоскостями  $z = z_{i,j,k}^B$  (верхняя граница) и  $z = z_{i,j,k-1}^B$  (нижняя граница). Высота верхней границы  $I_{i,j,k}^B$  определяется с помощью вычисленных при построении сетки «А»  $z$ -координат точек  $b_{i,j,k}$ ,  $b_{i-1,j,k}$ ,  $b_{i,j-1,k}$ ,  $b_{i-1,j-1,k}$  (см. рис. 4 прав.). Пусть  $z(b_{i,j,k})$  –  $z$ -координата точки  $b_{i,j,k}$ , тогда  $z_{i,j,k}^B = \frac{1}{4} \left( z(b_{i,j,k}) + z(b_{i-1,j,k}) + z(b_{i,j-1,k}) + z(b_{i-1,j-1,k}) \right)$ .

По построению,  $i, j$ -ая вертикальная колонка ячеек  $I_{i,j,k}^B$  совпадает с  $i, j$ -ой вертикальной колонкой ячеек  $I_{i,j,k}^A$ , и для перераспределения массы между сетками «А» и «Б» можно использовать одномерный подход. Перераспределение между вспомогательными сетками «А» и «Б» называется перераспределением в вертикальном направлении.

Рассмотрим область, занятую ячейками  $I_{i,j,k}^B$ , где индексы  $j, k$  фиксированы, а индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $N$  (долготный ряд ячеек). Эта область ограничена с севера и юга ступенчатыми поверхностями, полученными при построении вспомогательной сетки

«А», и аппроксимирующими поверхности  $S_j^*$  и  $S_{j-1}^*$  соответственно. Что касается верхней (нижней) границы рассматриваемой области, то она так же является ступенчатой поверхностью, аппроксимирующей поверхность, составленную из верхних (нижних) стенок исходных объемов  $A_{i,j,k}^*$  (индексы  $j, k$  фиксированы, а индекс  $i$  пробегает значения от 1 до  $N$ ). Таким образом,  $j, k$ -ый долготный ряд ячеек вспомогательной сетки «Б» аппроксимирует  $j, k$ -ый долготный ряд исходных объемов.

#### *Построение многогранников, аппроксимирующих исходные объемы*

С учетом того, что  $j, k$ -ый долготный ряд ячеек вспомогательной сетки «Б» аппроксимирует  $j, k$ -ый долготный ряд исходных объемов, можно построить многогранник, аппроксимирующий исходный объем  $A_{i,j,k}^*$ , взяв ячейки и части ячеек вспомогательной сетки «Б», лежащие между плоскостями  $x = x_{i,j,k}^*$  и  $x = x_{i-1,j,k}^*$ , аппроксимирующими восточную и западную грани исходного объема соответственно (см. рис. 5). Положение ограничивающей плоскости  $x_{i,j,k}^*$  определяется как средняя долгота четырех углов исходного объема  $A_{i,j,k}^*$ , прилежащих к его восточной грани. Таким образом, если  $x(a_{i,j,k}^*)$  –  $x$ -координата верхнего северо-восточного угла исходного объема  $A_{i,j,k}^*$ , то

$$x_{i,j,k}^* = \frac{1}{4} \left( x(a_{i,j,k}^*) + x(a_{i,j-1,k}^*) + x(a_{i,j,k-1}^*) + x(a_{i,j-1,k-1}^*) \right).$$

Очевидно, что полигоны, аппроксимирующие исходные объемы, отличаются от ячеек вспомогательной сетки «Б» только в долготном направлении, и для вычисления масс, заключенных в аппроксимирующих полигонах, можно использовать одномерный подход.

### **5. Каскадная схема на сфере**

Уравнение сохранения массы в жидком объеме (4) в сферической геометрии имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta A(t)} f \cdot \cos \varphi d\lambda d\varphi dz = 0, \quad (6)$$

здесь  $\lambda$  – долгота,  $\varphi$  – широта,  $z$  – высота,  $\cos \varphi$  – метрический множитель, возникающий из-за сходимости меридианов. В интеграле можно произвести замену переменной  $\mu = \sin \varphi$ , тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{\delta A(t)} f \cdot d\lambda d\mu dz = 0.$$

Таким образом, в  $\mu$ -координатах можно рассматривать задачу точно так же, как в декартовой геометрии, что позволяет применять приведенные в разделах 1 и 2 процедуры одномерного перераспределения массы и построения вспомогательных сеток (внося поправку на неравномерность  $\mu$ -сетки).

Следует заметить, что на сфере, из-за сходимости меридианов, исходные объемы в приполярных областях могут иметь весьма сложную форму, что будет приводить к большим геометрическим ошибкам, т.е. ошибкам, возникающим при аппроксимации исходного объема многогранником. Модификации каскадной схемы, которые позволяют избежать больших геометрических ошибок около полюсов, приведены в работе [6] и без изменений переносятся с плоской сферы на трехмерный случай.

## 6. Результаты численных экспериментов

Схема, представленная в данной работе, была испытана на тесте «твердое вращение с колебаниями по вертикали», предложенном в работе [3] в качестве стандартного теста для сравнения трехмерных схем переноса на сфере. Горизонтальное поле ветра в данном тесте соответствует вращению атмосферы вокруг земного шара с постоянной угловой скоростью (твердое вращение):

$$u = u_0 (\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \cos \lambda \sin \varphi),$$

$$v = u_0 \sin \alpha \sin \lambda,$$

где  $(u, v)$  – зональная и меридиональная компоненты поля ветра, константа

$$u_0 = \frac{2\pi R}{12 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 40 \text{ м/с} - \text{определяет частоту вращения равную одному обороту за 12}$$

дней,  $(\lambda, \varphi)$  - широта и долгота,  $R$  - радиус Земли,  $\alpha$  – угол наклона оси вращения по отношению к земной оси (от северного полюса к южному). Поле вертикального ветра имеет максимальную скорость около 2 см/с и периодически меняет направление (период равен 4 дням). Такой выбор поля ветра приводит к тому, что распределение движется вокруг сферы,

совершая при этом вертикальные колебания с периодом 4 дня. Через 12 дней распределение совершает полный оборот и возвращается в исходную точку. Точное решение через 12 дней совпадает с начальным распределением.

Эксперименты проводились на сетке с разрешением  $1,5^\circ \times 1,5^\circ$  по долготе и широте, 60 уровней по вертикали ( $\Delta z = 200$  м) с шагом по времени 60 мин (один оборот за 288 шагов) при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/4$ . Также, для исследования сходимости, были проведены эксперименты на сетках с разрешением  $1^\circ \times 1^\circ$  по долготе и широте, 90 уровней по вертикали и  $0,75^\circ \times 0,75^\circ$  по долготе и широте, 120 уровней по вертикали, с шагом по времени 40 и 30 мин соответственно (использовалось только  $\alpha = 0$ ). В качестве начального распределения использовалась эллипсоподобная функция:

$$q(t=0) = \frac{1}{2} \left( 1 + \cos(\pi \cdot r(\lambda, \varphi, z)) \right),$$

$$r^2 = \frac{d^2(\lambda, \varphi)}{R_{\max}^2} + \frac{(z - z_0)^2}{H_0^2},$$

$$z_0 = 6000 \text{ м}, \quad \lambda_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad R_{\max} = \frac{a}{3},$$

где  $d$  – расстояние по дуге большого круга от центра эллипса  $(\lambda_0, \varphi_0)$  до точки  $(\lambda, \varphi)$ ;  $R_{\max}$  – длина горизонтальных полуосей;  $H_0$  – длина вертикальной полуоси. В экспериментах использовалось два значения  $H_0$  – 1000 и 2000 м.

Численное решение данной задачи, полученное с помощью каскадной консервативной схемы, сравнивалось с численным решением, полученным с помощью неконсервативной полулагранжевой схемы, использующей три-кубическую лагранжеву интерполяцию. Траектории в экспериментах вычислялись аналитически. Результаты численных экспериментов приведены в таблице и на рис. 6. В таблице используются следующие нормы ошибок численного решения:

$$l_1 = \frac{\sum |f^{num} - f^{ex}| V_{i,j}}{\sum f^{ex} V_{i,j}}, \quad l_2 = \sqrt{\frac{\sum |f^{num} - f^{ex}|^2 V_{i,j}}{\sum |f^{ex}|^2 V_{i,j}}},$$

$$\max = \frac{\max f^{num} - \max f^{ex}}{\max f^{ex}}, \quad \text{mass} = \frac{\sum (f^{num} - f^{ex}) V_{i,j}}{\sum f^{ex} V_{i,j}},$$

где  $f^{ex}$  – точное решение;  $f^{num}$  – численное решение;  $V_{i,j} = 2\Delta\lambda\Delta z \sin \Delta\varphi \cos \varphi_j$  – объем ячейки вычислительной сетки;  $\Delta\lambda, \Delta z, \Delta\varphi$  – размеры ячейки в вертикальном, долготном и

широтном направлениях;  $\varphi_j$  – широта центра ячейки, суммирование подразумевается по всем ячейкам сетки.

Как видно из рис. 6, в экспериментах с  $H_0 = 1000$  м на сетке  $1,5^\circ \times 1,5^\circ$  по долготе и широте основной вклад в ошибку численного решения вносится вертикальной численной диффузией, что ожидаемо, так как в данном случае вертикальный масштаб распределения гораздо меньше, чем горизонтальный (10 интервалов сетки, против 25), и, соответственно, вертикальные градиенты, если выразить их в единицах  $\frac{1}{\text{инт.сет.}}$  больше. При  $H_0 = 2000$  м (правый столбец на рис. 6) ошибки за счет горизонтальной и вертикальной диффузии сравнимы. Также, как видно из таблицы, в случае  $H_0 = 2000$  м нормы ошибок численного решения значительно меньше.

Таблица

**Нормы ошибок численных решений в тесте «твердое вращение с вертикальными колебаниями»**

Алгоритм	$H_0$ (м)	$\alpha$	$l_1$	$l_2$	max	mass
Конс.	1000	0	0,16	9,91E-02	-4,41E-02	1,3E-15
Неконс.	1000	0	0,43	0,27	-0,19	-4,1E-7
Конс.	1000	$\pi/4$	0,16	9,51E-02	-4,81E-02	-1,6E-15
Неконс.	1000	$\pi/4$	0,45	0,29	-0,21	-5,3E-3
Конс.	2000	0	2,41E-02	1,43E-02	-1,92E-03	-1,5E-16
Неконс.	2000	0	8,94E-02	5,19E-02	-2,4E-02	-9,1E-7
Конс.	2000	$\pi/4$	3,41E-02	1,81E-02	-5,03E-03	9,5E-16
Неконс.	2000	$\pi/4$	0,11E-02	8,66E-02	-9,1E-02	-1,1E-3

Ошибки численного решения, полученного с помощью локально-консервативной схемы при обоих вертикальных масштабах, были ниже, чем ошибки решения, полученного с помощью неконсервативной схемы. Данный факт объясняется тем, что кусочно-параболические профили, используемые в консервативной схеме, аппроксимируют распределения с большими градиентами и разрывами производных (начальное распределение имеет разрыв второй производной при  $r = 1$ ) лучше, чем кубические

полиномы, используемые для интерполяции в неконсервативном полулагранжевом алгоритме.

На рис. 7 представлены графики зависимости  $l_1$  и  $l_2$  норм ошибок численного решения от разрешения. Кривые ошибок лежат между линиями сходимости второго и третьего порядков, из чего можно заключить, что эффективный порядок аппроксимации приблизительно равен 2,5. Сходимость медленнее ожидаемого третьего порядка можно объяснить наличием разрыва второй производной в начальном распределении.

### **Заключение**

В работе представлен локально-консервативный полулагранжев алгоритм численного решения уравнения переноса на сфере, в трехмерном случае в  $z$  системе координат по вертикали. В проведенных численных экспериментах нормы ошибок численного решения, полученного с помощью представленного алгоритма, оказались меньше, чем нормы ошибок численного решения, полученного с помощью стандартного неконсервативного полулагранжева алгоритма.

В настоящее время предложенный алгоритм модифицируется для использования в  $\sigma$  системе координат по вертикали и внедряется в глобальную полулагранжеву модель ПЛАВ. Версия алгоритма пригодная для использования на редуцированной сетке – дорабатывается.

Автор выражает благодарность научному руководителю работы д.ф.-м.н. М.А. Толстых за советы по тестированию и отладке локально-консервативной каскадной схемы и за замечания редакционного характера, а так же рецензенту к.ф.-м.н. с.н.с. ИВМ РАН А.В. Глазунову за замечания, которые помогли улучшить статью.

Работы была поддержана, программой президиума РАН №15, грантами министерства образования и науки РФ (заявки №№ 2012-1.1-12-000-2012-109, 2012-1.2.1-12-000-2007-066, 2012-1.3.2-12-000-1007-011), грантом РФФИ 05-10-01066, контрактами министерства образования и науки РФ 14.740.11.639 и 14.740.11.1091.

### **Список использованных источников**

1. Толстых М.А. Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. – М.; Обнинск: ОАО ФОР, 2010. – 111 с.
2. Colella P., Woodward P.R. The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations // J. Comput. Phys. – 1984. – Vol. 54. – P. 174–201.

3. *Jablonowski C., Lauritzen P.H., Taylor M., Nair R.D.* Idealized test cases for the dynamical cores of Atmospheric General Circulation Models. // A proposal for the NCAR ASP 2008 summer colloquium – 2008. – [http://www.cgd.ucar.edu/cms/pel/asp2008/idealized\\_testcases.pdf](http://www.cgd.ucar.edu/cms/pel/asp2008/idealized_testcases.pdf)

4. *Lauritzen P.H., Nair R.D., Ullrich P.A.* A conservative semi-Lagrangian multi-tracer transport scheme (CSLAM) on the cubed-sphere grid // *J. Comput. Phys.* – 2010. – V. 229. – Issue 5. – P. 1401–1424. – DOI: 10.1016/j.jcp.2009.10.036.

5. *Machenhauer B., Kaas E., Lauritzen P.H.* Finite-Volume Methods in Meteorology // *Computational Methods for the Atmosphere and the Oceans.* – 2009. – Special Vol. 14. – ELSEVIER – ISBN-13: 978-0-444-51893-4.

6. *Nair R.D., Scroggs J.S., Semazzi F.H.M.* Efficient conservative global transport scheme for climate and atmospheric chemistry models // *Mon. Wea. Rev.* – 2002. – Vol. 130. – P. 2059–2073.

7. *Norman M.R., Nair R.D.* Inherently conservative nonpolynomial-based remapping schemes: application to semi-Lagrangian transport // *Mon. Wea. Rev.* – 2008. – Vol. 136. – P. 5044–5061.

8. *Priestley A.* A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme // *Mon. Wea. Rev.* – 1993. – Vol. 121. – P. 621–629.

9. *Robert A.* A semi-implicit and semi-Lagrangian numerical integration scheme for the primitive meteorological equations // *J. Meteor. Soc. Japan.* – 1982. – Vol. 60. – P. 319–325.

10. *Skamarock W.C., Weissman M.L.* The impact of positive definite moisture transport on NWP precipitation forecasts // *Mon. Wea. Rev.* – 2009. – V. 137. – P.488-494.

11. *Tolstykh M.A., Shashkin V.V.* Vorticity-divergence mass-conserving semi-Lagrangian shallow-water model using the reduced grid on the sphere // *J. Comp. Phys.* – 2012. – Vol. 231. – P. 4205-4233.

12. *Zerroukat M., Wood N., Staniforth A.* SLICE-S: A semi-Lagrangian inherently conserving and efficient scheme for transport problems on the sphere // *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* – 2004. – Vol. 130. – N. 602. – P. 2649-2664.

13. *Zerroukat M., Allen T.* A three-dimensional monotone and conservative semi-Lagrangian scheme (SLICE-3D) for transport problems // *Quart. J. Roy. Met. Soc.* – 2012. – DOI: 10.1002/qj.1902.

*Поступила в редакцию 11.09.2012 г.*

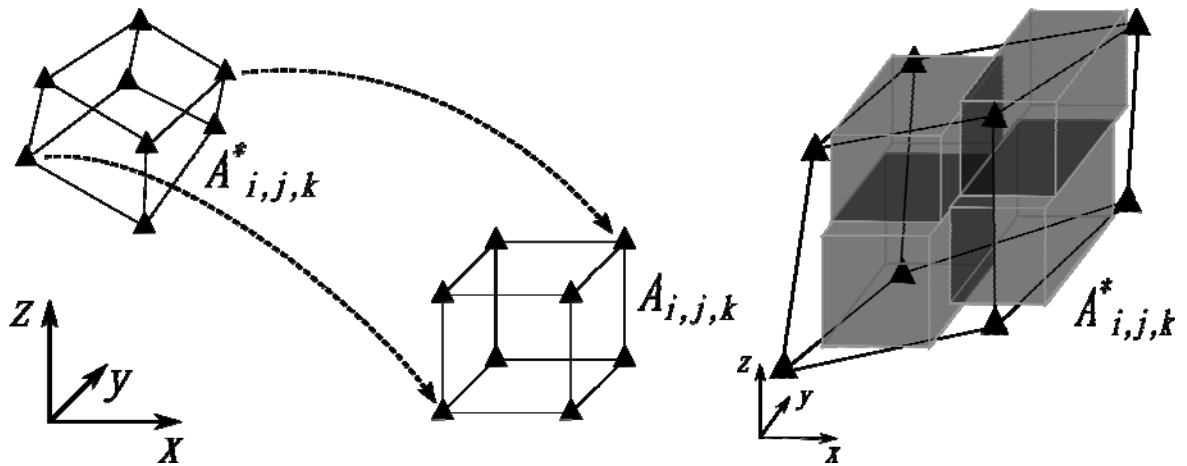


Рис. 1. Исходный объем (в трехмерном случае и его аппроксимация многогранником). Слева – схематичное изображение ячейки вычислительной сетки и соответствующего исходного объема в трехмерном случае. Справа – схематичное изображение аппроксимации исходного объема многогранником с гранями параллельными координатным плоскостям.

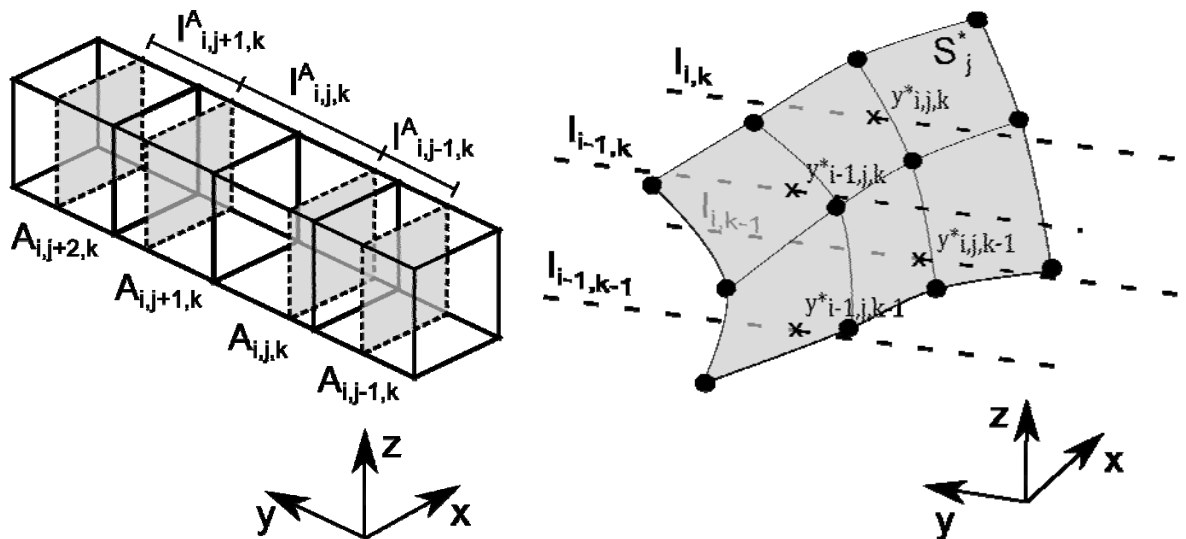


Рис. 2. Построение вспомогательной сетки «А». Слева – схематичное изображение ячеек вычислительной сетки (кубы со сплошными ребрами) и ячеек вспомогательной сетки «А». Северные (южные) грани ячеек вспомогательной сетки – серые прямоугольники с пунктирными ребрами, верние (нижние) и восточные (западные) грани ячеек вспомогательной сетки – совпадают с соответствующими гранями ячеек вычислительной сетки. Справа – пересечение линий сетки  $l_{i,k}$ ,  $l_{i-1,k}$ ,  $l_{i,k-1}$ ,  $l_{i-1,k-1}$  с поверхностью  $S^*_j$ .

$$l_{i-1,k}, l_{i,k-1}, l_{i-1,k-1} \text{ с поверхностью } S^*_j.$$



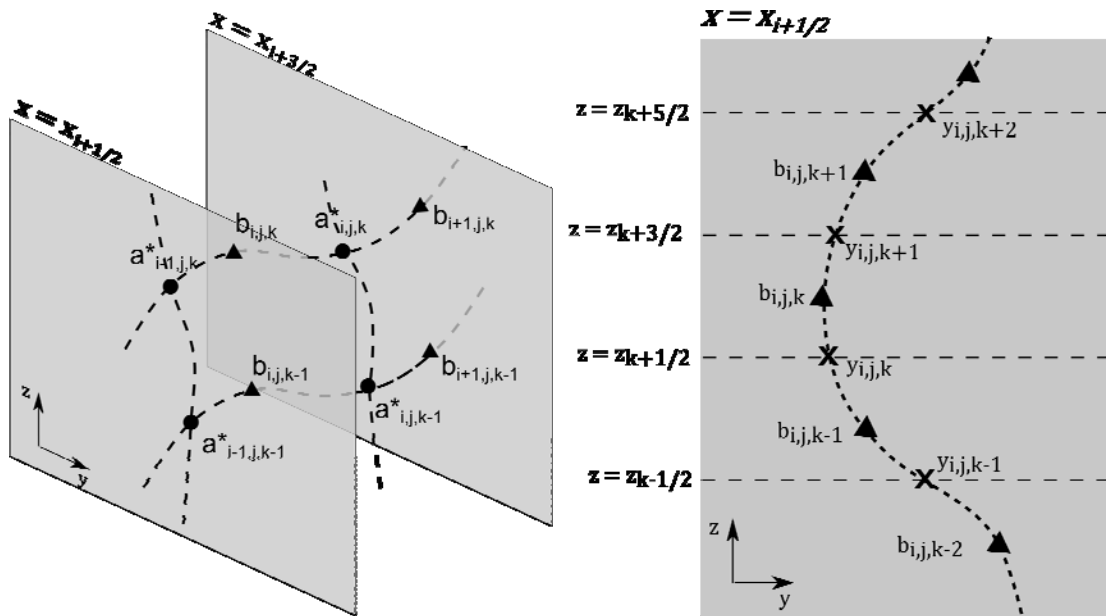


Рис. 3. Иллюстрация каскадного подхода к нахождению точек пересечения поверхности  $S_j^*$  и линий  $l_{i,k}$ .  $l_{i,k} = \{x = x_{i+1/2}, z = z_{k+1/2}\}$ ,  $k \in [1, L]$ ,  $i$  фиксировано. Кружками отмечены исходные точки обратных траекторий  $a_{ijk}^*$ , лежащие на поверхности  $S_j^*$ , треугольниками – вспомогательные точки  $b_{ijk}$ , знаком  $x$  – искомые точки пересечения.

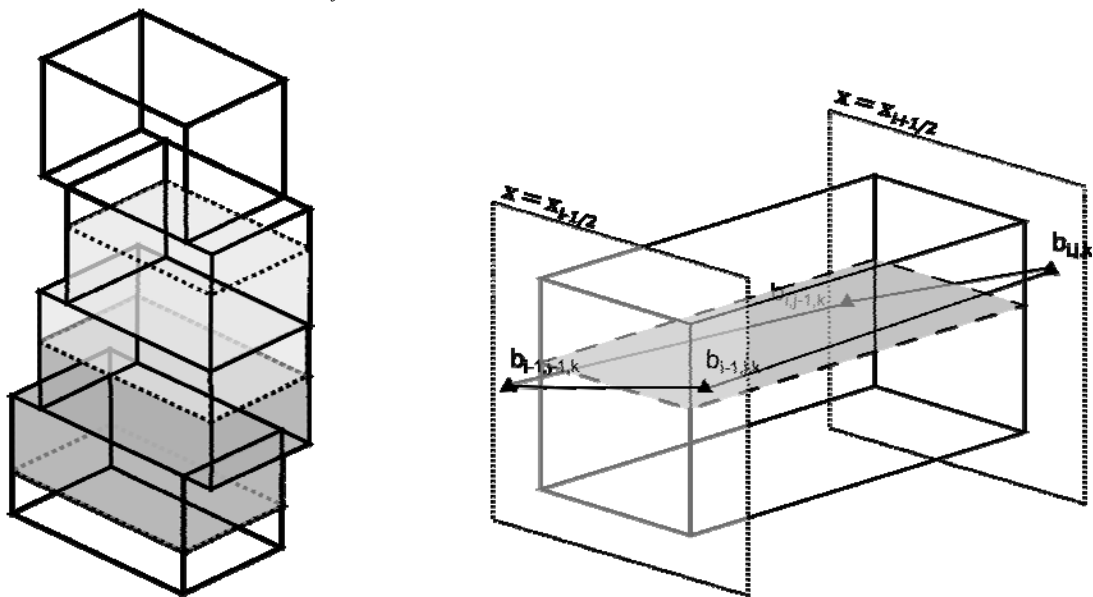
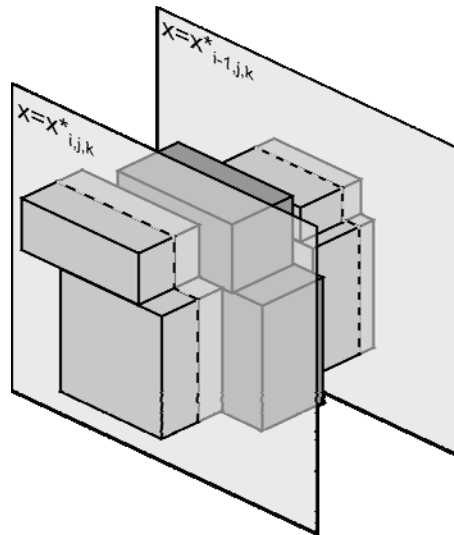


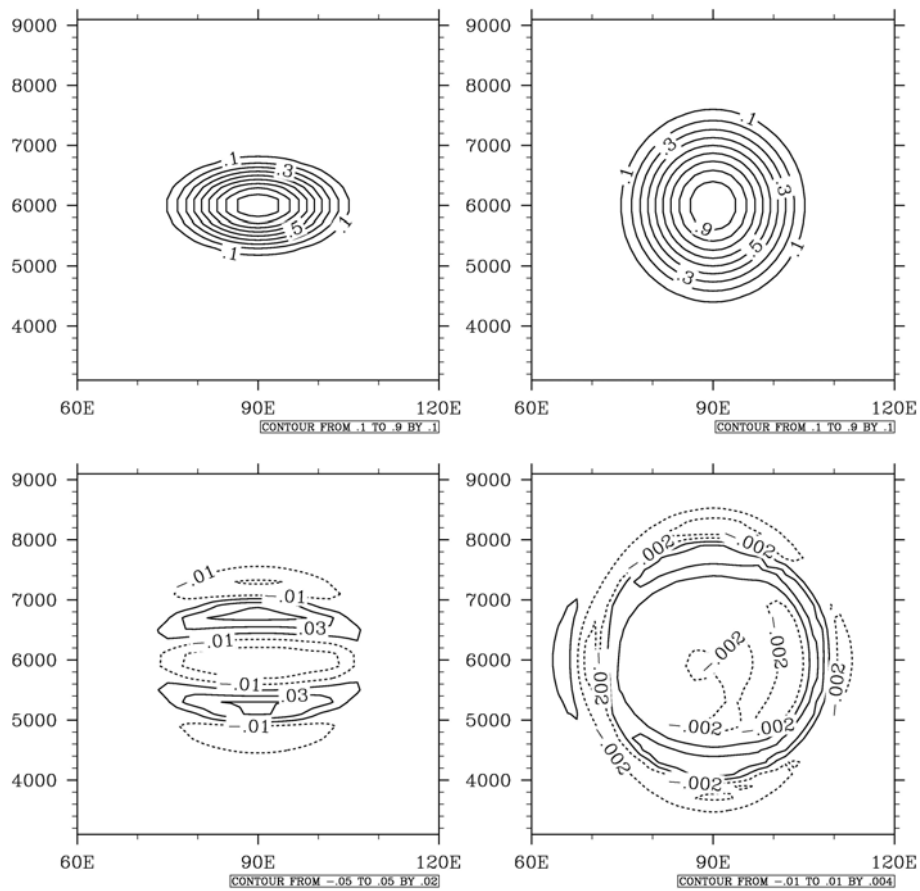
Рис. 4. Построение вспомогательной сетки Б. Слева – схематичное изображение ячеек вспомогательных сеток «А» (параллелепипеды со сплошными ребрами) и «Б» (области с серой заливкой и пунктирными ребрами). Справа – пространственное положение верхней границы ячейки  $I_{i,j,k}^B$ . Параллелепипед с черными ребрами – некоторая ячейка вспомогательной сетки «А», прямоугольник с серой заливкой и пунктирными ребрами —  $z = z_{i,j,k}^B$  – верхняя граница ячейки

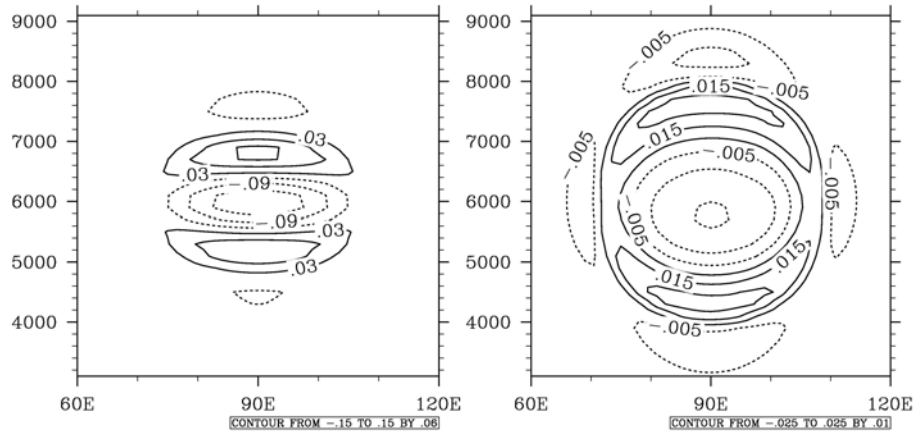
$$I_{i,j,k}^B.$$



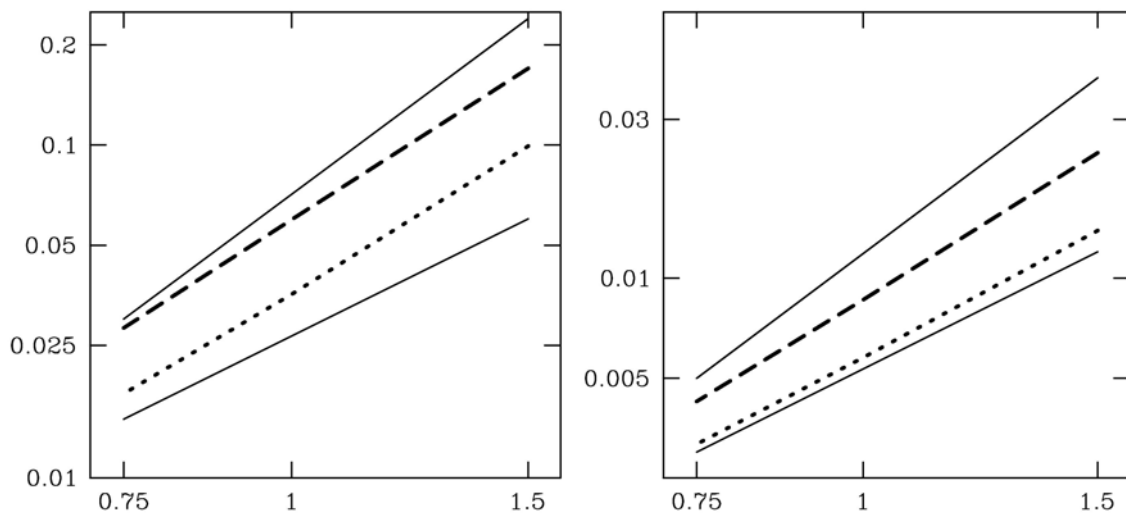
**Рис. 5. Построение многогранника аппроксимирующего исходный объем.**

Параллелепипеды с серыми гранями – ячейки вспомогательной сетки «Б», серые плоскости – ограничивающие плоскости многогранника, пунктирная линия – линия пересечения ограничивающей плоскости и ячейки вычислительной сетки





**Рис. 6. Результаты теста твердое вращение с вертикальными колебаниями при  $\alpha = 0$  на сетке  $1,5^\circ \times 1,5^\circ$  по широте и долготе, 60 уровней по вертикали. Вертикальные сечения (вдоль экватора) начального распределения переносимой величины (Верхний ряд) и ошибки численного решения после 12 дней моделирования (средний ряд – локально-консервативный алгоритм, нижний ряд – неконсервативный алгоритм). Левый столбец картинок соответствует эксперименту с  $H_0 = 1000$  м, правый –  $H_0 = 2000$  м. Прерывистые контуры соответствуют отрицательным значениям ошибки (значение численного решения – меньше значения точного).**



**Рис. 7. Сходимость численного решения к точному в тесте твердое вращение с вертикальными колебаниями при  $\alpha = 0$ . Слева –  $H_0 = 1000$  м, справа –  $H_0 = 2000$  м. Пунктирная и точечная линии – кривые ошибок численного решения в норме  $l_1$  и  $l_2$  соответственно. Верхняя сплошная линия – линия сходимости третьего порядка, нижняя сплошная линия – линия сходимости второго порядка. По обеим осям использован логарифмический масштаб.**