

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА УСВОЕНИЯ ДАННЫХ НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО АНСАМБЛЕВОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ГЛОБАЛЬНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

А.В. Шляева^{1,3}, В.Г. Мизяк¹, М.А. Толстых^{2,1}

¹ *Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации*

² *Институт вычислительной математики РАН*

³ *МГТУ им. Баумана*

shlyayeva@gmail.com, vmizyak@mecom.ru, tolstykh@inm.ras.ru

Введение

Сочетание постоянного развития численных моделей и вычислительных мощностей, лучшего понимания протекающих процессов, значительного увеличения проводимых наблюдений позволило существенно улучшить точность прогнозов погоды. Так, в настоящее время точность прогноза на трое суток сравнялась с точностью выдаваемого метеослужбами двадцать лет назад прогноза на одни сутки. Несмотря на такие серьёзные улучшения, требуется и дальнейшее повышение точности прогноза. Есть несколько путей решения этой проблемы.

Все современные системы численного прогноза погоды состоят не только из прогностической модели, ответственной за воспроизведение динамики атмосферной циркуляции, но и из системы усвоения данных реальных наблюдений, применяемой для оценки текущего состояния атмосферы.

Основная цель усвоения данных в метеорологии – определение состояния атмосферы, которое является начальным условием, необходимым для старта прогностической модели.

Определение начального состояния прогностической модели является достаточно трудоёмкой задачей с точки зрения вычислительных затрат. В ходе решения задачи усвоения данных получают вектор так называемого объективного анализа $x^a = (x_{a1}, \dots, x_{an})^T$ размерности n , которая равна произведению количества модельных переменных на количество точек модельного пространства (порядка 10^6 – 10^8 в современных моделях прогноза погоды). Наблюдения составляют вектор $y^o = (y_{o1}, \dots, y_{op})^T$ размерности p . Количество доступных на сегодняшний день наблюдений может иметь порядок 10^5 без использования спутниковых наблюдений и 10^7 при использовании данных наблюдений со

спутников. Также полагается наличие вектора априорной оценки, который называется вектором первого приближения $x^b = (x_{b1}, \dots, x_{bn})^T$ (размерность n) и является краткосрочным модельным прогнозом на заданный срок. В этом случае имеем

$$x^b(t_j) = M_{j-1 \rightarrow j} [x^a(t_{j-1})], \quad (1)$$

где $M_{j-1 \rightarrow j}$ – оператор модели.

Все указанные величины имеют ошибки, которые полагаются гауссовыми, несмещёнными, взаимно нескоррелированными и не содержащими временной корреляции.

В самом общем виде объективный анализ является решением задачи минимизации функционала следующего вида:

$$J(x) = \frac{1}{2} (x^b - x)^T (\mathbf{P}^b)^{-1} (x^b - x) + \frac{1}{2} (y^o - H(x))^T \mathbf{R}^{-1} (y^o - H(x)). \quad (2)$$

Здесь \mathbf{P}^b – матрица ковариаций ошибок первого приближения; \mathbf{R} – матрица ковариаций ошибок наблюдений; H – оператор наблюдений (в общем случае нелинейный), который проецирует вектор из пространства модели в пространство наблюдений.

Классический алгоритм фильтра Калмана формулируется для линейных систем. В этом случае оператор наблюдений и оператор модели представляются в виде матриц \mathbf{H}_j и $\mathbf{M}_{j-1 \rightarrow j}$ соответственно. Тогда при условии гауссовости ошибок алгоритм позволяет получить на шаге времени t_j оптимальную в смысле максимальной апостериорной и минимальной дисперсии оценку x^a в виде

$$x_j^a = x_j^b + \mathbf{K}_j [y_j^o - \mathbf{H}_j x_j^b], \quad (3)$$

где весовая матрица \mathbf{K}_j определяется как

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{P}_j^b \mathbf{H}_j^T (\mathbf{R}_j + \mathbf{H}_j \mathbf{P}_j^b \mathbf{H}_j^T)^{-1}. \quad (4)$$

Фильтр Калмана помимо оценки среднего также вычисляет матрицу ковариаций ошибок анализа:

$$\mathbf{P}_{j-1}^a = (\mathbf{E} - \mathbf{K}_{j-1} \mathbf{H}_{j-1}) \mathbf{P}_{j-1}^b, \quad (5)$$

здесь \mathbf{E} – единичная матрица размерности $n \times n$.

На каждом шаге усвоения ковариационная матрица ошибок первого приближения вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}_j^b = \mathbf{M}_{j-1 \rightarrow j} \mathbf{P}_{j-1}^a \mathbf{M}_{j-1 \rightarrow j}^T + \mathbf{Q}_j, \quad (6)$$

где \mathbf{Q}_j – матрица ковариаций ошибок модели.

Для случая нелинейных оператора наблюдений и оператора модели можно использовать алгоритм, получивший название расширенный фильтр Калмана. Для вычисления весовой матрицы в этом случае используются линеаризации операторов наблюдений и модели, т.е. такие матрицы \mathbf{H}_j и $\mathbf{M}_{j-1 \rightarrow j}$, для которых выполняется

$$H(x + \delta x) - H(x) = \mathbf{H} \delta x + o(\delta x^2), \quad (7)$$

$$M_{j-1 \rightarrow j}(x + \delta x) - M_{j-1 \rightarrow j}(x) = \mathbf{M}_{j-1 \rightarrow j} \delta x + o(\delta x^2). \quad (8)$$

Применение алгоритма расширенного фильтра Калмана в задачах усвоения метеорологических данных затруднено по нескольким причинам:

1. Необходимость построения линеаризации оператора модели, что в виду большой размерности задачи является трудоёмкой задачей.
2. Необходимость построения линеаризации оператора наблюдений.
3. Необходимость прогнозирования матрицы ковариаций ошибок первого приближения \mathbf{P}_j^b очень большой размерности $n \times n$ (при размерности современных моделей прогноза погоды $n \sim 10^8$ вычислительные затраты становятся неприемлемо высокими для оперативного применения).

Ансамблевые фильтры Калмана

Указанные недостатки удаётся обойти, применяя алгоритм ансамблевого фильтра Калмана. Особенностью данного метода является аппроксимация матрицы ковариаций ошибок первого приближения в пространстве значительно меньшей размерности, чем пространство модели.

При усвоении ансамблевыми фильтрами Калмана вместо одного вектора первого приближения используется ансамбль первых приближений $\{x^{b(i)}, i = \overline{1, k}\}$, где k – размерность ансамбля (на практике используются ансамбли с количеством участников порядка нескольких десятков или сотен).

На шаге анализа по ансамблю первых приближений и вектору наблюдений y^o ¹, учитывая ковариации ошибок наблюдений и первого приближения, вычисляется ансамбль анализов $\{x^{a(i)}, i = \overline{1, k}\}$.

Матрица ковариаций первого приближения при этом вычисляется как статистика ансамбля (здесь и далее индекс j опущен, если все величины в выражении относятся к одному и тому же моменту времени t_j):

$$\mathbf{P}^b = \frac{1}{k-1} \mathbf{X}^b \mathbf{X}^{bT} . \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{X}^b = \{x^{b(i)} - \bar{x}^b, i = \overline{1, k}\}$ – матрица отклонений от среднего, $\bar{x}^b = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x^{b(i)}$ – среднее по ансамблю.

Фильтры квадратного корня [10], к которым, в частности, относится реализованная нами схема локального ансамблевого фильтра Калмана с преобразованием ансамбля, на каждом шаге вычисляют вектор среднего анализа \bar{x}^a и матрицу ковариаций ошибок анализа \mathbf{P}^a .

Вектор среднего анализа в этом случае вычисляется аналогично (3):

$$x^a = x^b + \mathbf{K} \left[y^o - H(x^b) \right], \quad (10)$$

Матрицу ковариаций ошибок анализа можно вычислить по формуле (5). С другой стороны, так как

$$\mathbf{P}^a = \frac{1}{k-1} \mathbf{X}^a \mathbf{X}^{aT}, \quad (11)$$

то

¹ Оригинальный ансамблевый фильтр Калмана, предложенный в [5], и его модификации используют ансамбль возмущенных наблюдений, мы рассматриваем подмножество детерминированных ансамблевых фильтров.

$$\mathbf{X}^a = \sqrt{k-1}(\mathbf{P}^a)^{1/2}. \quad (12)$$

Тогда, зная вектор среднего анализа (10) и матрицу ковариаций ошибок анализа (11), можно вычислить векторы участников нового ансамбля анализов как:

$$x^a = \bar{x}^a + \mathbf{X}^a = \bar{x}^a + \sqrt{k-1}(\mathbf{P}^a)^{1/2}. \quad (13)$$

На шаге прогноза ансамбль первых приближений для следующего шага усвоения вычисляется из ансамбля анализов прогнозированием модели с заданной заблаговременностью:

$$\{x_j^{b(i)}, i = \overline{1, k}\} = \{M_{j-1 \rightarrow j}(x_{j-1}^{a(i)}), i = \overline{1, k}\}. \quad (14)$$

Схема усвоения

Рассмотрим подробнее реализованную нами схему ансамблевого усвоения.

Локальный ансамблевый фильтр Калмана с преобразованием ансамбля (LETKF, Local Ensemble Transform Kalman Filter, LETKF [8] – один из ансамблевых фильтров квадратного корня (подробный анализ фильтров квадратного корня приведён в [10]).

Данный ансамблевый фильтр использует локализацию наблюдений: для анализа в каждой точке модельной сетки используются только наблюдения, расположенные в локальной области. Для этого матрица, обратная матрице ковариаций ошибок наблюдений, умножается поэлементно на матрицу локализации:

$$(\mathbf{R}')^{-1} = (\mathbf{R})^{-1} \circ \mathbf{L}$$

Здесь \mathbf{L} – матрица локализации, \circ – поэлементное умножение матриц. Элементы матрицы локализации $0 \leq L_{ij} \leq 1$. Они равны нулю в случае, когда наблюдение не является локальным и, соответственно, не используется для вычисления анализа в данной точке.

Локализация позволяет частично решить проблему фиктивных ковариаций – больших ковариаций между далеко расположенными точками, возникающую из-за оценки матрицы ковариаций ошибок в пространстве существенно меньшей размерности. При локализации явным образом принимается во внимание локальная природа наблюдений. Кроме того, локализация позволяет эффективно уменьшить размерность задачи. Дополнительным плюсом является возможность распараллеливания анализа, т.к. анализ в каждой точке сетки может быть получен независимо от других точек.

Еще одной особенностью реализованной схемы усвоения является преобразование ансамбля. Это позволяет проводить все вычисления в пространстве ансамбля, размерность которого существенно меньше, чем размерность пространства модели.

Пусть $x = \bar{x}^b + \mathbf{X}^b w$, где w – некоторый вектор в пространстве ансамбля (размерности k). Матрица \mathbf{X}^b является линейным оператором проецирования из пространства ансамбля в модельное пространство.

Если w является случайным вектором с Гауссовым законом распределения, нулевым математическим ожиданием и матрицей ковариаций $(k-1)^{-1}\mathbf{E}$ (т.е. $w \square N(0, (k-1)\mathbf{E})$), то x – случайный вектор с математическим ожиданием \bar{x}^b и матрицей ковариаций $\mathbf{P}^b = (k-1)^{-1}\mathbf{X}^b(\mathbf{X}^b)^T$ (т.е. $x \sim N(\bar{x}^b, \mathbf{P}^b)$).

Введем следующие обозначения: $y^{b(i)} = H(x^{b(i)})$, $\bar{y}^b = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k y^{b(i)}$ – среднее по ансамблю, $\mathbf{Y}^b = \{y^{b(i)} - \bar{y}^b, i = \overline{1, k}\}$ – матрица отклонений от среднего.

При усвоении методом LETKF в каждой точке сетки вектор среднего анализа рассчитывается следующим образом:

$$\bar{x}^a = \bar{x}^b + \mathbf{X}^b \bar{w}^a. \quad (15)$$

Здесь \bar{w}^a – вектор среднего анализа в пространстве ансамбля

$$\bar{w}^a = \tilde{\mathbf{P}}^a (\mathbf{Y}^b)^T (\mathbf{R}')^{-1} (y^o - \bar{y}^b). \quad (16)$$

Матрица ковариаций ошибок анализа в пространстве ансамбля $\tilde{\mathbf{P}}^a$

$$\tilde{\mathbf{P}}^a = \left((k-1)\mathbf{E} + (\mathbf{Y}^b)^T (\mathbf{R}')^{-1} \mathbf{Y}^b \right)^{-1}. \quad (17)$$

Таким образом,

$$\bar{w}^a = \left((k-1)\mathbf{E} + (\mathbf{Y}^b)^T (\mathbf{R}')^{-1} \mathbf{Y}^b \right)^{-1} (\mathbf{Y}^b)^T (\mathbf{R}')^{-1} (y^o - \bar{y}^b). \quad (18)$$

Для вычисления ансамбля анализов $x^a = \bar{x}^a + \mathbf{X}^a$ необходимо найти весовые коэффициенты \mathbf{W}^a

$$\mathbf{X}^a = \mathbf{X}^b \mathbf{W}^a,$$

$$\mathbf{W}^a = \sqrt{k-1} (\tilde{\mathbf{P}}^a)^{1/2}.$$

Вместо вычисления среднего \bar{x}^a и отклонений от среднего \mathbf{X}^a можно вычислить напрямую значения участников ансамбля x^a

$$w^a = \bar{w}^a + \mathbf{W}^a,$$

$$x^a = \bar{x}^b + \mathbf{X}^b w^a.$$

Шаг прогноза, аналогично всем ансамблевым фильтрам, является шагом ансамблевого прогноза.

Локализация

При использовании локализации указанные выше вычисления проводятся независимо в каждой точке модельной сетки с использованием «локальных» для точки анализа наблюдений (наблюдений, расположенных на расстоянии не больше заданного от точки анализа). Матрица \mathbf{R}' имеет существенно меньшую размерность, чем матрица \mathbf{R} при удалении нулевых строк и столбцов (относящихся к нелокальным наблюдениям).

Так как при локализации таким методом для разных точек расчётной сетки используются разные множества локальных наблюдений, то может возникнуть проблема, возникающая и в методе оптимальной интерполяции: из-за использования в соседних точках сетки разных наблюдений инкремент анализа может быть негладким. Для решения этой проблемы используется матрица \mathbf{L} , отличная от бинарного классификатора: каждому наблюдению присваивается вес в зависимости от удаленности от точки анализа. Мы используем сглаживание с помощью функции ковариации Гаспари-Кона [6].

Для локальных наблюдений (радиозонды, наземные станции, спутниковые наблюдения ветра по движению облаков), в отличие от интегральных наблюдений (таких, например, как спутниковые наблюдения отраженной радиации) возможна вертикальная локализация. Для вертикальной локализации в нашей реализации ансамблевого фильтра применен тот же подход, что и для горизонтальной, локализация проводится по логарифму давления.

Предусмотрена возможность задания различных радиусов локализации для разных наблюдений и переменных, кроме того, радиус локализации может варьироваться в зависимости от вертикального уровня и широты. Необходимо задание радиусов локализации

на опорных точках (по высоте и широте), радиус локализации между опорными точками вычисляется билинейной интерполяцией.

Инфляция ковариации ошибок анализа

Типичной проблемой ансамблевых фильтров Калмана является недооценка ковариаций ошибок анализа. Это связано с особенностями алгоритма, с оценкой матрицы ковариации ошибок в пространстве существенно меньшей размерности, чем пространство модели.

Подходы к решению этой проблемы можно условно разделить на две группы: статистические, применяемые на шаге анализа, и физические, применяемые на шаге прогноза. На шаге анализа возможно использование мультипликативной или аддитивной инфляции ковариаций ошибок анализа. На шаге прогноза возможно применение различных параметризаций неадиабатических процессов подсеточного масштаба для разных участников ансамбля [7], различных параметров этих параметризаций. Также в некоторых реализациях применяют схему стохастического обратного рассеяния кинетической энергии (stochastic kinetic energy backscatter SKEB) [9], т.н. «стохастическую физику» (стохастические параметризации процессов подсеточного масштаба) [4] и другие подходы.

В нашей реализации в настоящее время применяются мультипликативная и аддитивная инфляции ковариаций ошибок первого приближения.

При использовании мультипликативной инфляции ковариации ошибок анализа умножаются на коэффициент, больший единицы, и выражение (6) для вычисления матрицы ковариации ошибок анализа в пространстве наблюдений принимает следующий вид

$$\tilde{\mathbf{P}}^a = \left((k-1)\rho^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{Y}^b \right)^{-1}.$$

Здесь ρ – коэффициент мультипликативной инфляции. В нашей реализации ρ может иметь различное значение для разных уровней по вертикали и широт. Для этого необходимо задание значений в опорных точках, аналогично радиусу локализации.

При использовании аддитивной инфляции к полученным членам ансамбля анализов на каждом шаге прибавляется случайный шум с заданными параметрами $\tilde{x}_j^a = x_j^a + \varepsilon_j$, на шаге прогноза $x_j^b = M_{j-1 \rightarrow j}(\tilde{x}_{j-1}^a)$. Этот подход может моделировать ошибку модели (с матрицей ковариаций ошибки \mathbf{Q}_j): неизвестный стохастический шум с нулевым математическим ожиданием. Мы применяем аддитивную инфляцию для всех компонент анализа, ε является

красным шумом, сгенерированным в спектральном пространстве, с ограничением на минимальную частоту и параметром максимальной амплитуды.

Модель

Реализованная схема усвоения была подключена к глобальной модели атмосферы ПЛАВ в версии с разрешением $1,4^\circ \times 1,125^\circ$ по долготе и широте соответственно, 28 сигма-уровней по вертикали. Модель ПЛАВ разработана в Институте вычислительной математики РАН и Гидрометцентре России и состоит из блока решений уравнений гидротермодинамики атмосферы собственной разработки [1] и набора параметризаций неадиабатических процессов подсеточного масштаба, разработанных международным консорциумом ALADIN/LACE [11]. Динамический блок модели ПЛАВ применяет традиционный для глобальных негидростатических моделей прогноза погоды полулагранжев полунявный алгоритм (подробнее см. [2]). Отличительными особенностями этого блока являются применение вертикального компонента абсолютной завихренности в качестве прогностической переменной, а также широкое использование конечных разностей четвертого порядка на несмещенной сетке. Модель ПЛАВ (с горизонтальным разрешением $0,9^\circ \times 0,72^\circ$) является основной оперативной моделью, используемой для глобальных среднесрочных прогнозов. Кроме того, модель ПЛАВ применяется оперативно в качестве компонента системы вероятностного прогноза на сезон.

Результаты экспериментов

В экспериментах по усвоению с использованием ансамблевой схемы и модели ПЛАВ использовались следующие наблюдения:

- наблюдения на наземных станциях и судовые наблюдения (synop, synship): приземное давление, температура на уровне 2 м, компоненты скорости ветра на уровне 10 м;
- наблюдения радиозондов (temp) на стандартных уровнях: температура и компоненты скорости ветра;
- спутниковые наблюдения ветра (satob): компоненты скорости ветра.

Оператор наблюдений для приземных наблюдений представляет собой билинейный интерполятор в точку наблюдения. Для наблюдений в свободной атмосфере используется трилинейная интерполяция, интерполяция по вертикали осуществляется по логарифму давления.

Для приземного давления осуществляется коррекция на разницу между билинейно интерполированной в точку станции модельной орографией и высотой станции. Для коррекции используется уравнение гидростатического баланса, коррекция выполняется в случае, если разница между модельной орографией и высотой станции меньше 600 м, в противном случае наблюдение не используется.

В проведенных экспериментах отдельно усваивались приземное давление и температура на уровне 2 м, а также температура и компоненты скорости ветра на сигма-уровнях модели.

Для усвоения приземного давления и температуры используются данные наземных станций и судовые наблюдения: скорректированное (для наземных станций) приземное давление, температура и компоненты ветра, а также наблюдения радиозондов: температура и компоненты скорости ветра на нижних уровнях в атмосфере.

Для усвоения температуры и компонент ветра в свободной атмосфере используются данные спутниковых наблюдений ветра (компоненты скорости ветра) и наблюдения радиозондов (температура и компоненты скорости ветра).

Проводились эксперименты по усвоению в непрерывном цикле с шагом усвоения 6 часов на два месяца (август-сентябрь 2007 года).

Для генерации участников ансамбля на первом шаге анализа к полям анализа оперативной схемы усвоения данных Гидрометцентра России были добавлены поля красного шума (сгенерированные аналогично подходу с аддитивной инфляцией). Известно, что задание начальных полей первого приближения на первом шаге усвоения для глобальных моделей при шаге усвоения 6 часов почти не влияет на анализ через пять суток после старта усвоения, поэтому выбор подхода для генерации начальных полей не оказывает большого влияния на качество анализа после периода адаптации схемы усвоения.

На рисунках (рис. 1–3) приведены осредненные по внетропической зоне Северного полушария среднеквадратические ошибки анализа температуры на уровнях 500 и 850 гПа, а также среднеквадратические ошибки анализа и первого приближения температуры на уровне 2 м для различных дат анализа (по горизонтали).

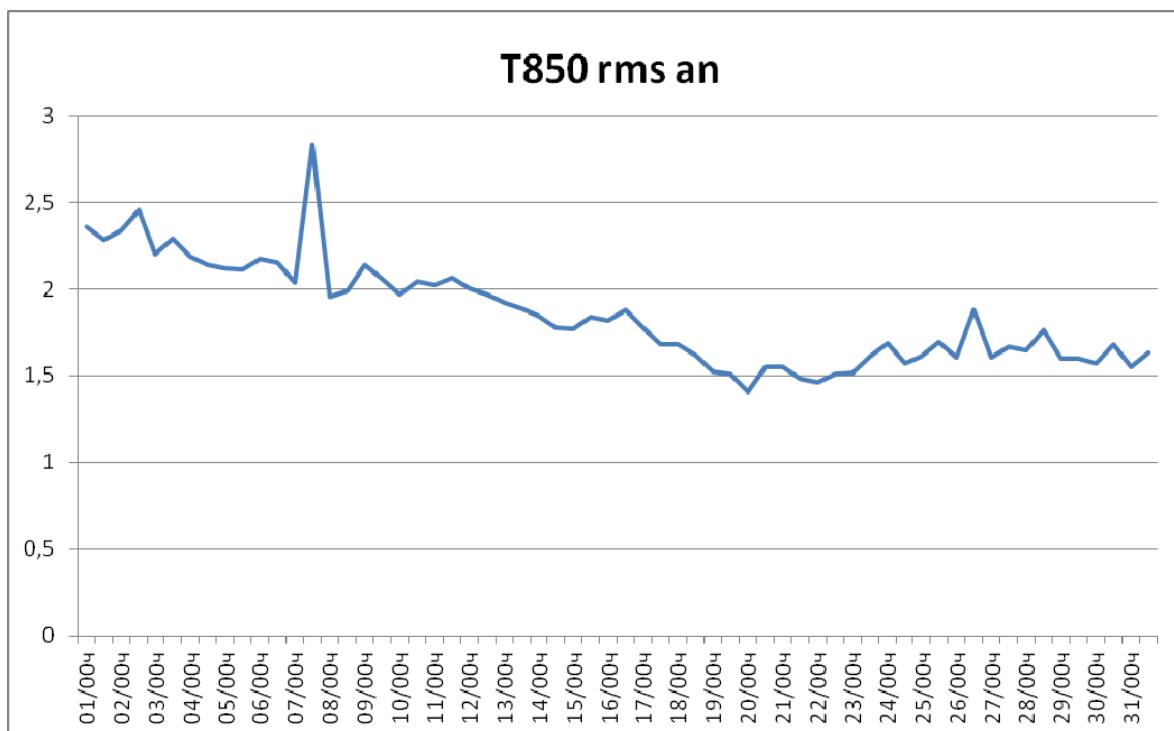


Рис. 1. Среднеквадратическая ошибка поля анализа для температуры на уровне 850 гПа, осреднённая по внетропической зоне Северного полушария.

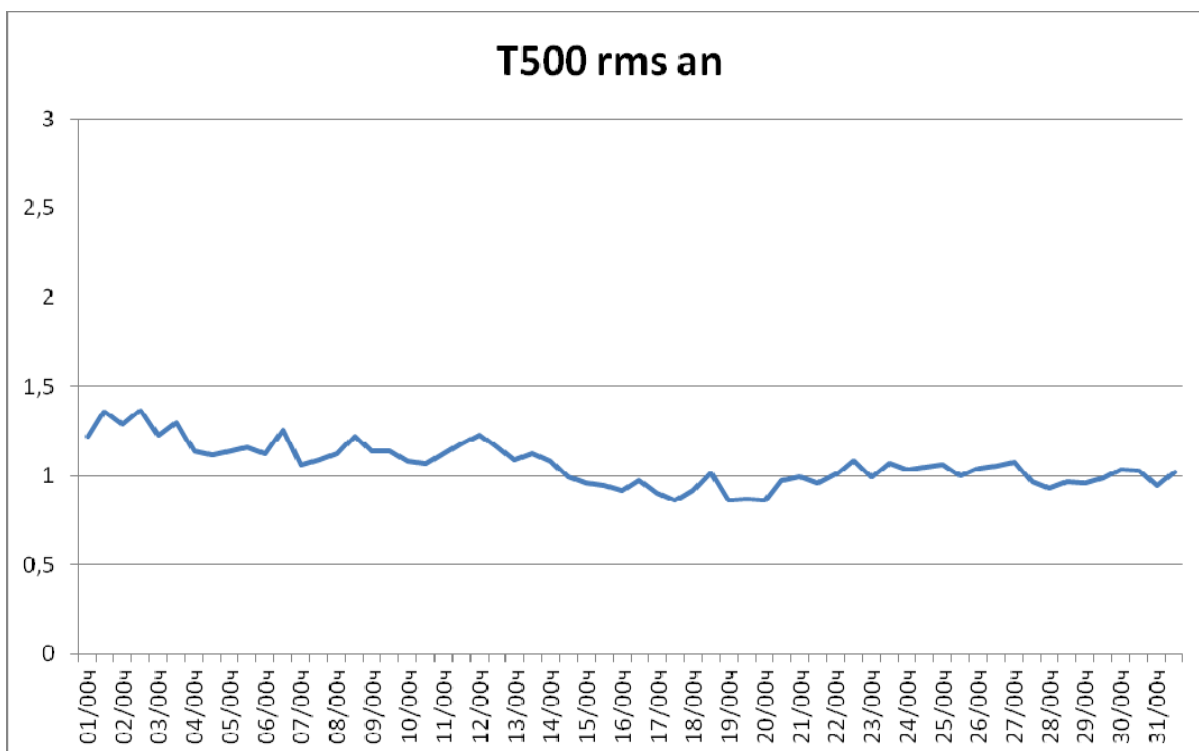


Рис. 2. Среднеквадратическая ошибка поля анализа для температуры на уровне 500 гПа, осреднённая по внетропической зоне Северного полушария.

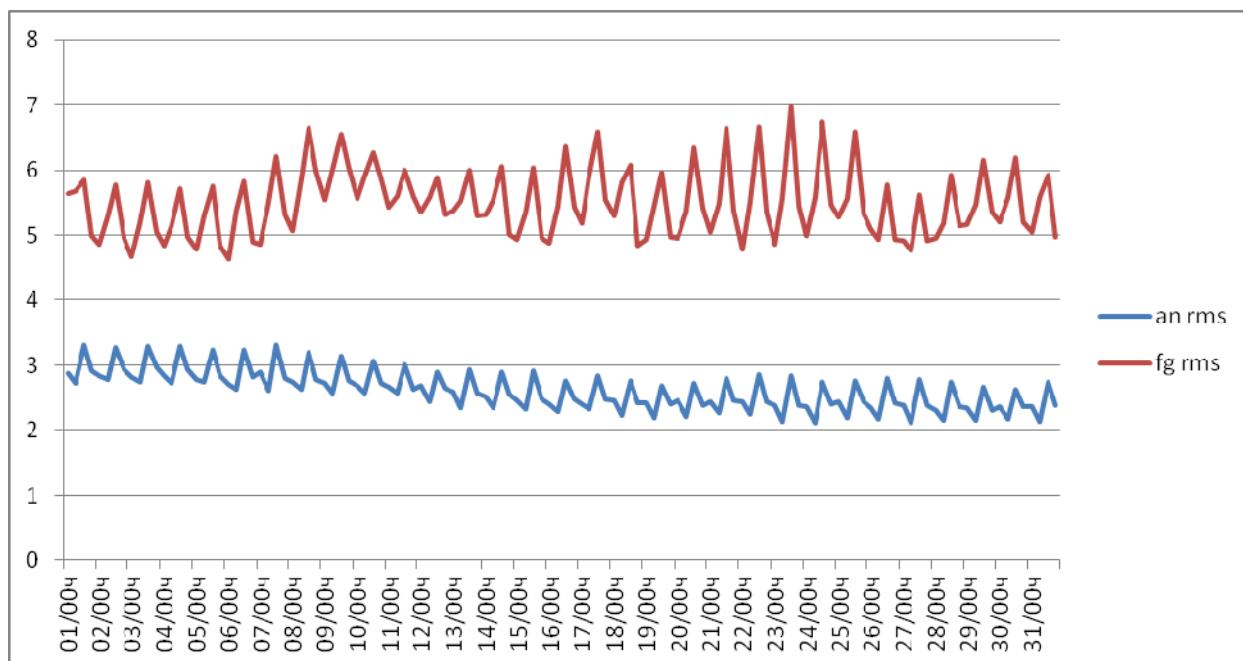


Рис. 3. Среднеквадратические ошибки полей анализа и первого приближения для температуры на уровне 2 м от поверхности Земли, осреднённые по внетропической зоне Северного полушария.

Заключение

Мы разработали и реализовали систему усвоения метеорологических данных наблюдений на основе локального ансамблевого фильтра Калмана с преобразованием ансамбля, работающую совместно с глобальной моделью атмосферы ПЛАВ. Результаты показали устойчивую работу системы в циклическом усвоении в течение одного месяца.

В настоящее время ведутся работы по добавлению новых типов наблюдений: наблюдений самолетов AIREP и спутниковых наблюдений ветра по движению облаков AMV. Известно [3], что для наблюдений AMV характерна пространственная автокорреляция. Планируется исследовать устойчивость схемы усвоения к усвоению автокоррелированных наблюдений (при использовании диагональной матрицы ковариаций ошибок наблюдений), а также влияние прореживания наблюдений на качество анализов и возможность использования недиагональной матрицы ковариаций ошибок наблюдений, отражающей пространственные автоковариации наблюдений AMV.

Также планируется исследовать различные физические методы учета ошибок модели в применении к реализованной схеме усвоения и модели ПЛАВ.

Разработанную систему усвоения предполагается применить совместно с моделью ПЛАВ более высокого горизонтального разрешения.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ 10-05-01066-а, соглашения Минобрнауки, РАН, ИВМ РАН № 8344, 8350 от 17.08.2012.

Список использованных источников

1. Толстых М.А. Полулагранжева модель атмосферы с высоким разрешением для численного прогноза погоды // Метеорология и гидрология. – 2001. – № 4. – С. 5–16.
2. Толстых М.А. Глобальная полулагранжева модель численного прогноза погоды. – М.-Обнинск: ОАО ФООП, 2010. – 111 с.
3. Bormann N., Saarinen S., Kelly G., Thépaut J.-N. The Spatial Structure of Observation Errors in Atmospheric Motion Vectors from Geostationary Satellite Data // Monthly Weather Review. – 2003. – № 131(4). – P. 706–718.
4. Buizza R., Miller M., Palmer T. N. Stochastic representation of model uncertainties in the ECMWF Ensemble Prediction System // Quart J Royal Met Soc. – 1999. – № 125(560). – P. 2887–2908.
5. Evensen G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics // Journal of Geophysical Research. – 1994. – № 99(C5). – P. 10,143–10,162.
6. Gaspari G., Cohn S. E. Construction of correlation functions in two and three dimensions // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 1999. – № 125(554). – P. 723–757.
7. Houtekamer P. L., Mitchell H. L., Deng X. Model Error Representation in an Operational Ensemble Kalman Filter // Monthly Weather Review. – 2009. – № 137(7). – P. 2126–2143.
8. Hunt B. R., Kostelich E. J., Szunyogh I. Efficient data assimilation for spatiotemporal chaos: A local ensemble transform Kalman filter // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2007. – № 230(1-2). – P. 112–126.
9. Shutts G. A kinetic energy backscatter algorithm for use in ensemble prediction systems // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society. – 2005. – № 131(612). – P. 3079–3102.
10. Tippett M. K., Anderson J. L., Bishop C. H., Hamill T. M., Whitaker J. S. Ensemble Square Root Filters // Monthly Weather Review. – 2003. – № 131(7). – P. 1485–1490.
11. Geleyn J.-F., Bazile E., Bougeault P., Deque M., Ivanovici V., Joly A., Labbe L., Piedelievre J.-P., Piriou J.-M., Royer J.-F. Atmospheric parameterization schemes in Meteo-France's ARPEGE N.W.P. model // Parameterization of subgrid-scale physical processes, ECMWF Seminar proceedings. – Reading, UK: 1994. – P. 385–402.

Поступила в редакцию 11.09.2012 г.