

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ НА ОСНОВЕ СПЕКТРАЛЬНОГО АЛГОРИТМА И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В МОДЕЛИ COSMO-RU

В.Л. Перов

*Гидрометеорологический научно-исследовательский центр Российской Федерации
perov@metcom.ru*

Введение

Описание турбулентности – одна из не решенных до конца проблем в физике атмосферы и океана. Трудности при описании турбулентности происходят в основном из за сильной нелинейности уравнений. Различные неустойчивости при больших числах Рейнольдса (Re) приводят к появлению вторичных циркуляций, таких, как вихри и волны, которые развиваются на разных пространственных и временных масштабах. Нелинейные взаимодействия между движениями на разных масштабах генерируют нерегулярные «стохастические» течения. Решения существуют только для простейших течений, которые локально изотропны и которые зависят только от одного безразмерного параметра Re .

В случае атмосферной и океанской турбулентности турбулентные течения усложняются такими факторами, как пространственная анизотропия и волны. На относительно малых масштабах сила тяжести является причиной плотностной стратификации и появления гравитационных волн. На более крупных масштабах сила Кориолиса, вызванная планетарным вращением, приводит к квазидвумерности движения и появлению инерционных волн. На планетарных масштабах изменение силы Кориолиса с широтой (β – эффект) приводит к появлению волн Россби. Модели турбулентности, используемые для моделирования всех этих течений, должны быть способны учитывать различные влияния на разных масштабах, но осреднения Рейнольдса уравнений Навье-Стокса (ОРУНС) не делают различия между масштабами, смешивая их вместе. В отличие от этого подхода, спектральный подход учитывает процессы, зависящие от масштаба. В данной статье мы рассмотрим развитие спектральной модели для турбулентных течений в пограничном слое атмосферы (ПСА), фокусируя внимание на трудных для моделирования ситуациях с устойчивой и сильно устойчивой температурной стратификацией.

Устойчивая стратификация приводит к возникновению пространственной анизотропии турбулентности, т.е. уменьшению турбулентного перемешивания по вертикали и его

увеличению по горизонтали. С усилением стратификации слой воздуха вблизи подстилающей поверхности становится менее связанным со слоем, лежащим выше, делая последний менее чувствительным к турбулентным потокам момента, тепла и влаги на поверхности. Исследуя это явление, Mahrt [10, 11] рассмотрел два предельных режима: очень устойчивый и слабо устойчивый, однако в большинстве случаев процессы в устойчивом ПСА лежат между этими предельными режимами.

Физика очень устойчивого ПСА достаточно сложная. Хотя такие ПСА становятся очень мелкими, до 10 м и менее [5, 6], данные наблюдений показывают, что в них по-прежнему существует развитая турбулентность [9]. Влияние сильной устойчивости в ПСА имеет двоякое влияние. С одной стороны, это приводит к подавлению вертикального турбулентного перемешивания, с другой стороны, это ведет к увеличению вертикального сдвига ветра и, значит, к увеличению продукции турбулентной кинетической энергии (ТКЭ). Эти противоположные влияния стратификации сильно увеличивают нерегулярность турбулентности и приводят к явлению перемежаемости турбулентности. Эта картина усложняется вкладом внутренних волн [19] и их обрушением.

Похожая ситуация наблюдается и в океанских слоях с сильной устойчивой стратификацией, где значения турбулентной энергии и вертикального турбулентного потока момента остаются конечными даже для относительно больших величин числа Ричардсона [17]. Следует отметить, что такие явления в устойчивых пограничных слоях, как пространственная анизотропия и взаимодействие турбулентности и внутренних волн, относятся к наиболее трудным для математического моделирования. Оба процесса характеризуются сильной нелинейностью и трудны для аналитических теорий. Поэтому большинство моделей турбулентности либо игнорируют указанные процессы, либо включают их, используя очень простые аппроксимации.

Параметризация турбулентности для устойчивой стратификации, используемая в атмосферных моделях, обычно основана на замыканиях в предположении, что процесс близок к изотропному. Затем эта аппроксимация экстраполируется на реальные движения с сильной пространственной анизотропией и внутренними волнами. Такая экстраполяция может приводить к неправильным результатам, ухудшая, например, качество прогноза ветра, температуры и влажности в ПСА, рассчитанного по такой модели. Поэтому улучшение моделей турбулентности в атмосферных моделях, основанных на ОРУНС, продолжает оставаться важной задачей. В последнее время развиваются модели, альтернативные ОРУНС. Один класс таких моделей основан на методах спектрального замыкания [12]. В общем, спектральные замыкания более сложные чем ОРУНС, их преимущество состоит в

том, что они сохраняют более полную физику и являются более точными и общими, чем ОРУНС.

В данной работе используется спектральная модель, основанная на отображении поля скорости на квази-Гауссово поле, чьи гармоники описываются уравнениями Ланжевена. Параметры отображения рассчитываются, используя процедуру последовательного исключения мелкомасштабных мод скорости и температуры, что дает уравнения для более крупномасштабных гармоник. В этой процедуре учитывается объединенный вклад турбулентности и внутренних волн, при этом пространственная анизотропия турбулентности явно разрешается. Когда процесс последовательного исключения распространяется до самых больших масштабов турбулентности, доступных в системе, спектральное замыкание дает новую модель турбулентности. Эта модель была использована при построении модифицированной схемы ПСА модели COSMO-RU [1].

Краткое описание алгоритма спектрального замыкания

Алгоритм спектрального замыкания применяется для трехмерной несжимаемой атмосферы с наложенным однородным вертикальным устойчивым температурным градиентом. Атмосфера описывается уравнениями для скоростей, температуры и уравнением неразрывности в приближении Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} - \alpha g \vartheta \hat{e}_3 = \nu_0 \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{f}^0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\vartheta + \frac{d\vartheta}{dz} u_3 = k_0 \nabla^2 \vartheta, \quad (2)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (3)$$

где \mathbf{u} и ϑ – флуктуации компонент скорости и потенциальной температуры; P – давление; ρ – фоновая плотность (постоянная величина); ν_0 и k_0 – молекулярная вязкость и теплопроводность соответственно; α – коэффициент термического расширения; g – ускорение свободного падения; $d\vartheta/dz$ – градиент фоновой (невозмущенной) потенциальной температуры;

\mathbf{f}^0 – крупномасштабное внешнее возбуждение (форсинг), обычно используемое в спектральных теориях турбулентности; оно возникает из-за крупномасштабных сдвиговых неустойчивостей и поддерживает турбулентность в статистически устойчивом состоянии. Следуя теории турбулентности Колмогорова, детали этого возбуждения несут существенны при статистическом описании. Влияние этого возбуждения на систему осуществляется через единственный параметр – скорость поступления энергии в систему на крупных масштабах.

Заметим, что уравнение для температуры (2) не включает отдельный форсинг. Предполагается, что флуктуации температуры возбуждаются флуктуациями скорости.

Из-за сильных нелинейных взаимодействий внешнее возбуждение воздействует на все гармоники Фурье вплоть до масштаба диссипации $k_d = (\epsilon / \nu_0^3)^{1/4}$ (ϵ – скорость вязкой диссипации). Гармоники случайно возбуждают друг друга, при этом одновременно происходит и их случайное затухание. В статистически установившемся состоянии процессы возбуждения и затухания гармоник находятся в балансе друг с другом, т.е. каждая гармоника Фурье $\mathbf{u}(\mathbf{k}, \omega)$ (\mathbf{k} и ω – волновое число в пространстве Фурье и частота соответственно) получает и теряет одинаковое в статистическом смысле количество энергии. Принимая во внимание двойственность между нелинейными взаимодействиями и стохастическим возбуждением и затуханием, нелинейное слагаемое в уравнении (1) может быть заменено случайным форсингом \mathbf{f} , а затухание – турбулентной вязкостью. В результате получим линейное уравнение со стохастическим форсингом и затуханием, известное как уравнение Ланжевена

$$u_i(\mathbf{k}, \omega) = G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) f_j(\mathbf{k}, \omega). \quad (4)$$

Следуя [8], переход к уравнению Ланжевена может рассматриваться как метод, который способствует замене первоначального нелинейного уравнения Навье-Стокса линейным стохастическим уравнением с форсингом, в котором бюджет энергии систематически поддерживается для каждой гармоники Фурье. Для температуры может быть выведено уравнение, подобное уравнению Ланжевена, со случайным форсингом в виде возмущений вертикальной скорости

$$\vartheta(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{d\Theta}{dz} G_\vartheta(\mathbf{k}, \omega) w(\mathbf{k}, \omega). \quad (5)$$

Основное предположение используемого метода – это то, что форсинг \mathbf{f} является квази-Гауссовым. Это предположение дает возможность вывести выражения для коэффициентов турбулентного перемешивания скорости и температуры. Флуктуации поля скорости при осреднении равны нулю, и предположение о несжимаемости накладывает ограничения на форсинг $\mathbf{f}(\mathbf{k}, \omega)$ из (4). В предположении квазигауссовости, этот форсинг полностью определяется его двухточечной двухвременной корреляционной функцией. Корреляционная функция форсинга вычисляется для статистически средней энергии, поступающей к данной гармонике k через взаимодействие с другими гармониками, так что ее амплитуда D пропорциональна средней скорости переноса энергии через эту моду. Баланс между энергией, поступающей от форсинга, и энергией, теряемой вследствие вихревого затухания, дает возможность связать амплитуду форсинга D со скоростью диссипации ϵ и

затуханием вследствие устойчивой температурной стратификации. В случае нейтральной стратификации этот подход воспроизводит некоторые основные особенности изотропной однородной турбулентности, включая спектр и константу Колмогорова. Вывод функций Грина для скорости $G_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ и температуры $G_\theta(\mathbf{k}, \omega)$ для системы уравнений (1)–(3) дан в работах [16, 18], здесь мы приводим только конечные выражения:

$$G_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = G(\mathbf{k}, \omega) [\delta_{ij} + A(\mathbf{k}, \omega) P_{i3}(\mathbf{k}) \delta_{j3}] \quad (6)$$

$$A(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{N^2}{(-i\omega + \nu_h k_h^2 + \nu_z k_z^2) (-i\omega + \kappa_h k_h^2 + \kappa_z k_z^2) + N^2 P_{33}(\mathbf{k})}, \quad (7)$$

$$G(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \nu_h k_h^2 + \nu_z k_z^2)^{-1}, \quad (8)$$

$$G_\theta(\mathbf{k}, \omega) = (-i\omega + \kappa_h k_h^2 + \kappa_z k_z^2)^{-1}, \quad (9)$$

где k_z и k_h – вертикальные и горизонтальные волновые числа; ν_z и κ_z – коэффициенты турбулентного перемешивания скорости и температуры по вертикали соответственно; ν_h и κ_h – коэффициенты турбулентного перемешивания скорости и температуры по горизонтали; N – частота Брента-Вайсяля (параметр, характеризующий стратификацию), δ_{ij} – символ Кронекера и $P_{ij}(k) = \delta_{ij} - k_i k_j / 2$. Заметим, что из-за влияния устойчивой стратификации, коэффициенты турбулентного перемешивания по вертикали и горизонтали становятся разными.

Для расчета параметров затухания вихрей используется алгоритм последовательного осреднения по малым интервалам гармоник температуры и скорости, которые, используя уравнения Ланжевена (4) и (5), дают малые приращения в коэффициенты турбулентного перемешивания по вертикали и горизонтали. Этот алгоритм, подробно описанный в работе [16, 18], приводит к системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для $\nu_z, \nu_h, \kappa_z, \kappa_h$

$$\frac{d}{dk}(\nu_z, \nu_h, \kappa_z, \kappa_h) = -c \frac{\varepsilon}{k^5} F_{1,2,3,4}(\nu_z, \nu_h, \kappa_z, \kappa_h), \quad (10)$$

где $c \cong 0,7$, $F_1 \div F_4$ – трансцендентные выражения. Вычисления коэффициентов турбулентного перемешивания начинаются с масштаба Колмогорова k_d , где начальные значения ν_z и κ_z равны их молекулярным значениям ν_0 и κ_0 , и продолжаются до произвольного волнового числа $k < k_d$. Система уравнений (10) решалась численно. Решения, полученные для безразмерных переменных ν_z/ν_n , ν_h/ν_n , κ_z/ν_n , κ_h/ν_n , представлены на рис. 1 как функции отношения k/k_0 . Здесь $k_0 = (N^3/\varepsilon)^{1/2}$ – волновое число Ozmidova и ν_n – коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали при нейтральной стратификации. При больших значениях k/k_0 (относительно малые масштабы) все безразмерные коэффициенты турбулентности стремятся к их значениям при нейтральной

стратификации. При малых k/k_0 приблизительно на границе генерации внутренних волн безразмерные коэффициенты турбулентного перемешивания значительно отклоняются от своих значений в нейтральной стратификации.

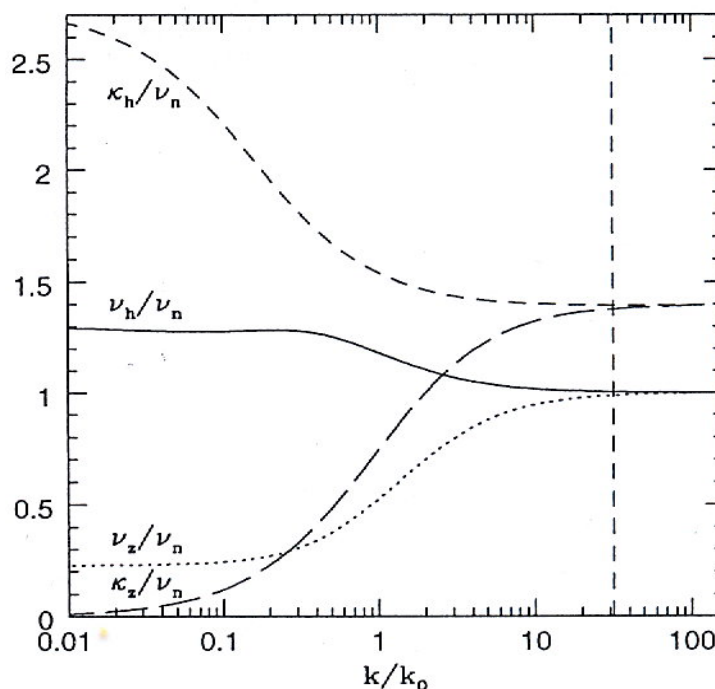


Рис. 1. Зависимость нормированных на ν_n коэффициентов турбулентного переноса скорости и температуры по вертикали и горизонтали от k/k_0 . Вертикальная штриховая линия показывает положение порога генерации внутренних волн в присутствии турбулентности.

Отметим, что коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали для скорости ν_z сохраняет конечное асимптотическое значение даже при очень устойчивой стратификации. Это происходит, по-видимому, вследствие действия внутренних волн, которые, так же как и турбулентные вихри, являются составной частью спектральной модели. Следует отметить, что действие внутренних волн происходит одновременно с анизотропией потока, вызванной устойчивой стратификацией и началом сильного различия в коэффициентах турбулентного перемешивания скорости и температуры.

Другой интересный результат заключается в том, что при стремлении κ_z/ν_n к нулю, для $k/k_0 \rightarrow 0$ при устойчивой стратификации, коэффициент турбулентного перемешивания температуры по вертикали подавляется, в то время как коэффициент турбулентного перемешивания температуры по горизонтали увеличивается почти в два раза по сравнению с нейтральным случаем. Этот факт может быть важным для моделей прогноза погоды при прогнозе температуры в устойчивой стратификации.

Процесс исключения малых масштабов может быть продолжен до самого крупного масштаба турбулентности, отождествляемого с интегральным масштабом длины k_L^{-1} . Этот

подход аналогичен осреднению Рейнольдса, и полученные уравнения представляют собой класс уравнений Навье-Стокса с осреднением по Рейнольдсу. В формате ОРУНС безразмерные коэффициенты турбулентности ν_z/ν_n , ν_h/ν_n , κ_z/ν_n , κ_h/ν_n могут быть представлены как функции градиентного числа Ричардсона $Ri = N^2/S^2$. Это может быть сделано в предположении, что существует баланс между генерацией турбулентной кинетической энергии (ТКЭ) за счет сдвига ветра P ($P = \nu_z S^2$, S – величина сдвига), диссипацией ТКЭ ε и уменьшением ТКЭ за счет устойчивой стратификации B ($B = \kappa_z N^2$). Зависимость безразмерных коэффициентов турбулентного переноса от Ri показана на рис. 2, которая повторяет зависимость коэффициентов от k/k_0 , показанную на рис. 1.

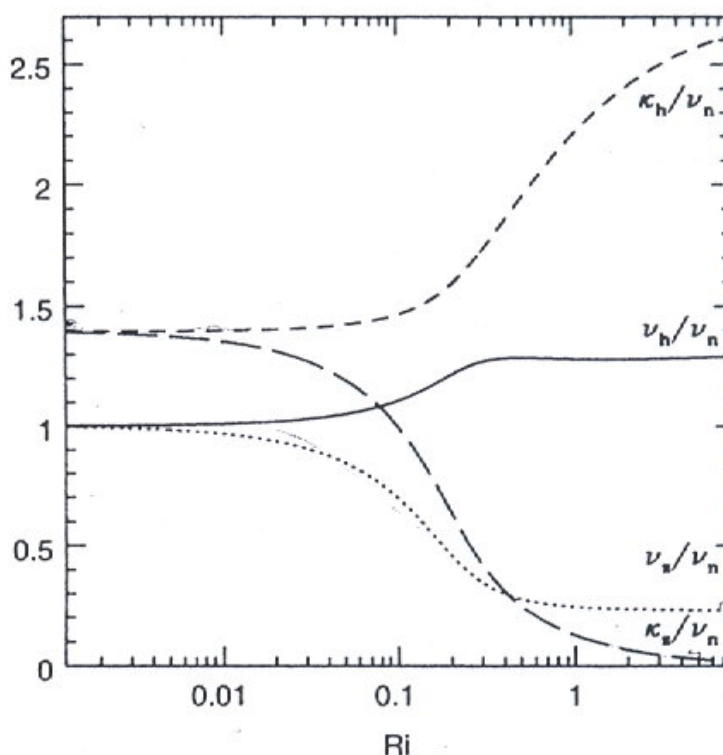


Рис. 2. Нормированные на нейтральную стратификацию коэффициенты турбулентного переноса как функции градиентного числа Ri .

Коэффициенты турбулентного переноса скорости и температуры начинают отличаться от значений при нейтральной стратификации уже при относительно небольших Ri . Наиболее значительные изменения коэффициентов по величине происходят в интервале $0,1 Ri - 1,0 Ri$. Интересно отметить, что спектральный алгоритм не дает одного критического значения Ri , для которого турбулентное перемешивание прекращается полностью, что предсказано в работах [3, 14]. Для $Ri > 0,1$ оба коэффициента турбулентного перемешивания по вертикали убывают, но коэффициент для температуры быстрее, чем коэффициент для скорости. В

конечном счете устойчивая стратификация может полностью подавить вертикальное турбулентное перемешивание температуры (и других скалярных величин), однако вертикальное перемешивание скорости продолжается до больших Ri , по-видимому, из-за вклада внутренних волн. Такое поведение коэффициентов турбулентного перемешивания не воспроизводится в ОРУНС моделях, используемых в численных моделях прогноза погоды, где концепция наложенного извне «остаточного» турбулентного перемешивания обычно используется для того, чтобы учесть подавляемое в этих моделях турбулентное перемешивание [4]. Это приводит к тому, что многие модели используют некие искусственные минимальные значения (достаточно большие) коэффициентов турбулентного перемешивания по вертикали.

Реализация спектрального алгоритма в схеме турбулентности модели COSMO-RU

Модели, основанные на ОРУНС, используют уравнения для трех компонент скорости, температуры, влажности и давления. Для моделирования атмосферного пограничного слоя модели ОРУНС в первую очередь используют коэффициенты турбулентного переноса по вертикали скорости K_M и температуры (влажности и других скаляров) K_H . Центральной проблемой при моделировании ПСА является вывод соответствующих выражений для K_M и K_H . В широко используемой в атмосферных моделях (в том числе и в COSMO-RU) схеме турбулентности Меллора и Ямады [13] эти коэффициенты имеют вид

$$K_M = q l S_M, \quad (11)$$

$$K_H = q l S_H, \quad (12)$$

где $q^2 = 2K$ (K – кинетическая энергия турбулентности); l – турбулентный масштаб длины (путь смешения); S_M и S_H – функции, зависящие от стратификации и содержащие ряд констант, определяются в [16] из решения системы двух линейных уравнений.

Заменим S_M и S_H в (11)–(12) на функции, полученные в спектральном алгоритме

$$S_M = \frac{v_z}{v_n}, \quad (13)$$

$$S_H = \frac{\kappa_z}{v_n}, \quad (14)$$

где $v_n = q l$ – вертикальный коэффициент для момента в нейтральном случае. Для численной аппроксимации зависимости S_M и S_H в (13) и (14) от Ri используем соответствующие кривые на рис. 2. Соответствующие изменения были внесены в модуль TURBDIF модели COSMO-RU. Следует отметить, что наряду с S_M и S_H в (11)–(12) интерес представляет вычисление l , входящего сомножителем в формулы коэффициентов турбулентного перемешивания. В модели COSMO-RU для вычисления l используется простая диагностическая формула

(Блэкадара), полученная для нейтральной стратификации. Эта формула дает асимптотику $l \sim \kappa z$ (κ – константа Кармана) вблизи подстилающей поверхности и $l \sim l_\infty$ на верхней границе ПСА. В [2] показано, что эта формула дает значительные погрешности в средней и верхней частях ПСА, и предложен другой алгоритм вычисления l в ПСА. Однако исследование этого вопроса выходит за рамки данной статьи.

Для изучения влияния новых S_M и S_H на развитие процессов в пограничном слое атмосферы в качестве первого шага был использован вариант модели COSMO-RU, состоящий из одной вертикальной колонны. В такой модели не учитывается горизонтальная адвекция метеоэлементов, хотя остальные модули модели совпадают с пространственным вариантом COSMO-RU. Вертикальное разрешение модели в одноколонной модели равнялось 25 м. Для моделирования был выбран устойчивый ПСА, который наблюдался во время эксперимента BASE (Beaufort Sea Arctic Stratus Experiment), для которого имеются данные по вертикальной структуре ПСА [15]. Кроме того, ситуация во время BASE моделировалась при помощи вихререзающей (VRM) модели с шагом 10 м. по трем осям [7]. Следует отметить, что полученные в [7] результаты показали хорошее совпадение с натурными данными BASE и были использованы для сравнения с результатами одноколонной модели. В эксперименте BASE изучалась реакция ПСА на изменение температуры подстилающей поверхности (лёд, покрытый снегом). В первом случае температура подстилающей поверхности изменялась от 265 до 262 К в течение 12 ч (случай умеренной устойчивой стратификации), во втором случае изменение температуры было от 265 до 252 К (случай сильной устойчивой стратификации) за такой же период времени. На рис. 3 показаны рассчитанные профили потенциальной температуры с новыми и стандартными S_M и S_H , а также профили, полученные в VRM модели после 12-часового моделирования.

Совпадение между новой моделью и VRM очень хорошее для умеренной стратификации. Стандартная модель сильно завышает верхнюю границу температурного ПСА в этом случае. В случае сильной стратификации, рассчитанный профиль потенциальной температуры в новой модели несколько ниже, чем в VRM. Стандартная модель снова показывает некоторое завышение верхней границы ПСА.

Рассчитанные вертикальные профили горизонтальных компонент ветра U (правые кривые) и V (левые кривые) приведены на рис. 4. Результаты, полученные в новой модели, показывают хорошее совпадение с профилями ветра в VRM. Стандартная модель недостаточно точно воспроизводит профили ветра в случае умеренной стратификации, однако в случае сильной стратификации ситуация улучшается.

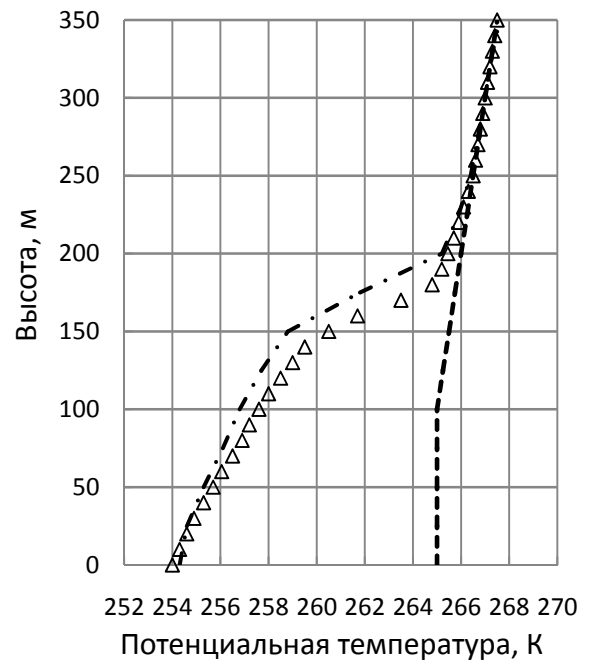
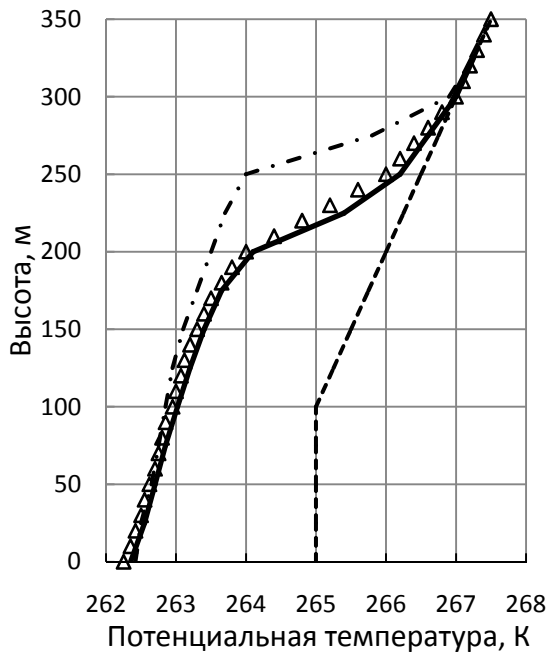


Рис. 3. Вертикальные профили потенциальной температуры для случая умеренной (слева) и сильной (справа) устойчивой стратификации с новыми (сплошные линии) и стандартными (штрихпунктирные линии) S_M и S_H . Треугольниками обозначены результаты ВРМ, короткими штрихами – начальные профили потенциальной температуры.

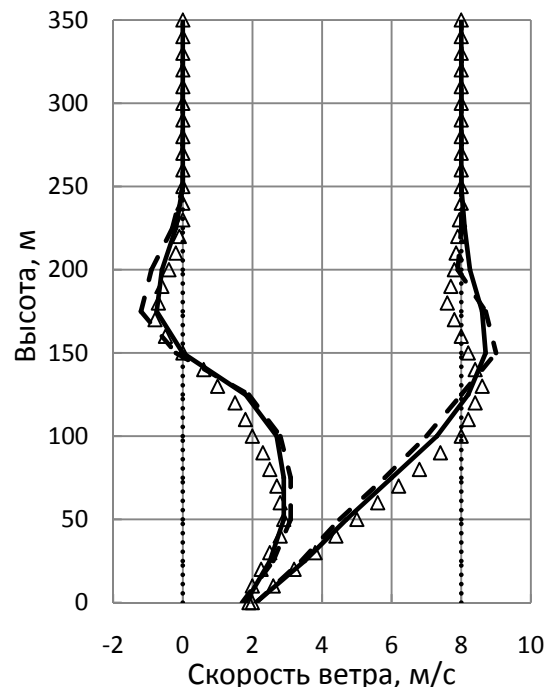
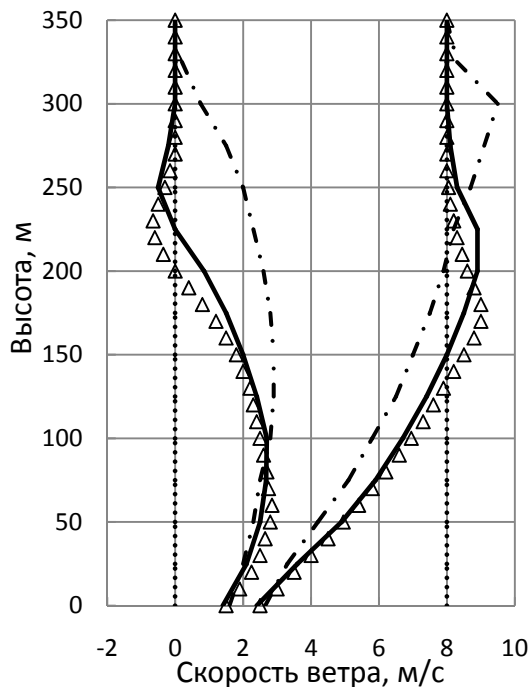


Рис. 4. Вертикальные профили горизонтальных компонент ветра U и V для случая умеренной (слева) и сильной (справа) устойчивой стратификации с новыми (сплошные линии) и стандартными (штрихпунктирные линии) S_M и S_H . Треугольниками обозначены данные ВРМ, точками – начальные профили ветра ($U^0 = 8$ м/с, $V^0 = 0$ м/с).

Заключение

Спектральный алгоритм для расчета коэффициентов турбулентного перемешивания, использованный в данной работе, основан на процедуре исключения гармоник малых масштабов, что приводит к модели, описывающей самые крупные энергонесущие турбулентные вихри. Спектральный алгоритм не требует введения эмпирических коэффициентов. Алгоритм дает дисперсионное соотношение для внутренних волн в присутствии турбулентности и позволяет изучать взаимодействие волн и турбулентности, что важно при моделировании устойчивого атмосферного пограничного слоя. Алгоритм описывает вертикально-горизонтальную анизотропию, появляющуюся в устойчивой стратификации и дает выражения для коэффициентов турбулентного переноса скорости ветра и температуры (влажности и других скаляров) по вертикали и горизонтали. Полученные результаты не поддерживают идею о существовании критического числа Ричардсона, при превышении которого турбулентность полностью подавляется устойчивой стратификацией. Вместо этого алгоритм дает интервал чисел Ричардсона, в котором вертикальное перемешивание подавляется устойчивой стратификацией, в то время как горизонтальное перемешивание значительно увеличивается. Предложенный алгоритм был включен в схему турбулентности модели COSMO-RU (вариант с одной колонной). Новый алгоритм был проверен на воспроизведении устойчивого пограничного слоя атмосферы над морским льдом, покрытым снегом, в условиях умеренной и сильной стратификации. Рассчитанные потенциальная температура, компоненты скорости ветра, высота пограничного слоя атмосферы находятся в хорошем соответствии с данными наблюдений и результатами вихреразрешающей модели для случая умеренно устойчивой стратификации. В случае сильно устойчивой стратификации рассчитанная потенциальная температура немного отличается от температуры в вихреразрешающей модели в верхней части пограничного слоя. Планируется включение спектрального алгоритма в трехмерную модель COSMO-RU и проведение расчетов для ситуаций с устойчивым ПСА.

Список использованных источников

1. Вильфанд Р.М., Ривин Г.С., Розинкина И.А. Мезомасштабный краткосрочный региональный прогноз погоды в Гидрометцентре России на примере COSMO-RU // Метеорология и гидрология. – 2010. – № 1. – С. 5–17.
2. Перов В.Л. Реализация алгоритма расчета турбулентного масштаба длины, основанного на методе смещения частиц воздуха под влиянием сил плавучести, в модуле пограничного слоя атмосферы модели COSMO-RU Гидрометцентра России // Труды Гидрометцентра России. – 2011. – Вып. 346. – С. 76–86.

3. *Howard L.N.* Note on a paper of John W. Miles // *J. Fluid. Mech.* – 1961. – Vol. 10. – P. 509–512.
4. *Kantha L.H., Clayson C.A.* An improved mixed-layer model for geophysical applications // *J. Geophys. Res.* – 1994. – Vol. 99. – P. 25235–25266.
5. *King, J.C.* Some Measurements of Turbulence Over an Antarctic Ice Shelf // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* – 1990. – Vol. 116. – P. 379–400.
6. *Kitaigorodskii S.A., Joffre S.M.* In Search of Simple Scaling for the Heights of the Stratified Atmospheric Boundary Layer // *Tellus.* – 1988. – Vol. 40A. – P. 419–443.
7. *Kosovic B., Curry J.* A large eddy simulation study of a quasi-steady stably stratified atmospheric boundary layer // *J. Atmos. Sci.* – 2000. – Vol. 57. – P. 1052–1068.
8. *Kraichnan R.H.* An Interpretation of the Yaglom-Orszag Turbulence Theory // *Phys. Fluids.* – 1987. – Vol. 30. – P. 2400–2405.
9. *Larsen S.E., Courtney M., Mahrt L.* Low Frequency Behaviour of Horizontal Power Spectra in Stable Surface Layers // *Proc. 9th AMS Symposium on Turbulence and Diffusion, American Meteorological Society, Boston, USA.* – 1990. - P. 401-404.
10. *Mahrt L.* Stratified Atmospheric Boundary Layers and Breakdown of Models // *Theoret. Comput. Fluid. Dyn.* – 1998. – Vol. 11. – P. 263–279.
11. *Mahrt L.* Stratified Atmospheric Boundary Layers // *Boundary-Layer Meteorol.* – 1999. – Vol. 90. – P. 375–396.
12. *McComb W.D.* *The Physics of Fluid Turbulence.* –/ Oxford University Press, 1991. – 576 p.
13. *Mellor G.L., Yamada T.* Development of turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys. Space Phys.* – 1982. – Vol. 20. – P. 851–875.
14. *Miles J.W.* On the stability of heterogeneous shear flows // *J. Fluid Mech.* – 1961. – Vol. 10. – P. 496–508.
15. *Paluch I.R., Lenschow D.H.* Arctic boundary layer in the fall sea over open and frozen sea // *J. Geophys. Res.* – 1997. – Vol. 102. – P. 25955–25971.
16. *Perov V., Sukoriansky S., Galperin B.* Implementation of the quasi-normal scale elimination theory of turbulence in the regional weather prediction model HIRLAM // *Geophysical Geosciences Union, Geophysical Research Abstracts.* – 2006. – Vol. 8. – P. 08921.
17. *Peters H., Gregg M.C., Toole J.M.* On parameterization of Equatorial Turbulence // *J. Geophys. Res.* – 1988. – Vol. 93. – P. 1199–1218.
18. *Sukoriansky S., Galperin, B., Perov V.* A quasi-normal scale elimination model of turbulence and its application to stably stratified flows // *Nonlinear Processes in Geophysics.* – 2006. – Vol. 13. – P. 9–22.
19. *Zilitinkevich S., Perov V., King J.* Near-surface turbulent fluxes in stable stratification: calculation techniques for use in general circulation models // *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* – 2002. – Vol. 138. – P. 1571–1587.