

ПОСТРОЕНИЕ ИЗОЛИНИЙ ПО НЕРЕГУЛЯРНОЙ СЕТИ ТОЧЕК В РАМКАХ ГРАФИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ISOGRAPH

В.В. Копейкин, Ю.В. Алферов

*Гидрометеорологический научно-исследовательский
центр Российской Федерации
help@tushino.com, alferov@mecom.ru*

Метеорологам при работе над краткосрочным прогнозом погоды необходимо оценивать складывающуюся синоптическую ситуацию. Помощь в этом оказывают карты текущей погоды. Такие карты, собственно, могли бы расчерчиваться по данным объективного анализа. Однако в процедуре объективного анализа имеется ряд задержек, связанных со сбором всех или, по крайней мере, большей части поступающих в реальном времени данных до некоторого срока отсечения, обычно два-три часа после срока наблюдения, их декодированием, выполнением процедур интерполяции разнородных, часто довольно сложных в интерпретации данных и т.п. Однако метеорологам важно иметь экспресс-анализ данных наблюдений как можно раньше, пусть даже не все данные еще поступили. Эта потребность обуславливает необходимость разработки программы для расчета изолиний по данным, расположенным в нерегулярной сети точек.

Эту задачу можно решать двумя способами. Во-первых, можно провести интерполяцию в узлы некоторой регулярной сетки и затем расчертить карты по полученным данным. А во-вторых, можно, как это принято в геодезии, построить триангуляцию, то есть планарный граф, все внутренние области которого являются треугольниками, и рассчитать изолинии по полученной триангуляции. Для реализации в графической системе Isograph [1] был избран второй способ.

Задача построения триангуляции по исходному набору точек является неоднозначной. Существует множество видов триангуляций и методов их построения. Наиболее приемлемой для задач картографии считается триангуляция Делоне [4].

Напомним несколько определений [4]. Триангуляция удовлетворяет условию Делоне, если внутри окружности, описанной вокруг любого построенного треугольника, не попадает ни одна из заданных точек триангуляции. Триангуляция называется выпуклой, если минимальный многоугольник, охватывающий все ее треугольники, является выпуклым. Такой многоугольник называется выпуклой оболочкой данной триангуляции. Триангуляция называется триангуляцией Делоне, если она является выпуклой и удовлетворяет условию Делоне.

При построении триангуляции Делоне важнейшей операцией является проверка выполнения условия Делоне для пар треугольников. Условие Делоне заключается в том, что внутри окружности, описанной вокруг некоторого треугольника, не должна попасть ни одна точка исходного набора. Если такая точка обнаружена, то она обязательно является вершиной смежного треугольника. В этом случае производится операция перестроения двух рассматриваемых треугольников, после чего треугольники уже удовлетворяют условию Делоне. Операция перестроения заключается в смене диагонали четырехугольника, состоящего из этих двух рассматриваемых смежных треугольников.

Проверка условия Делоне для пары треугольников заключается, собственно, в проверке, не попадает ли вершина смежного треугольника в окружность, описанную вокруг данного треугольника. Пусть P_1, P_2, P_3 – вершины треугольника, вокруг которого описывается окружность; P_0 – вершина смежного треугольника, подлежащая проверке; $x_{P_i}, y_{P_i}, z_{P_i}$ – координаты точки P_i . Тогда

$$\begin{aligned}k &= x_{P_1}^2 + y_{P_1}^2 ; \\m &= x_{P_2}^2 + y_{P_2}^2 ; \\n &= x_{P_3}^2 + y_{P_3}^2 ; \\a &= x_{P_1} \cdot (y_{P_2} - y_{P_3}) + x_{P_2} \cdot (y_{P_3} - y_{P_1}) + x_{P_3} \cdot (y_{P_1} - y_{P_2}) ; \\b &= k \cdot (y_{P_2} - y_{P_3}) + m \cdot (y_{P_3} - y_{P_1}) + n \cdot (y_{P_1} - y_{P_2}) ;\end{aligned}$$

$$c = k \cdot (x_{p_2} - x_{p_3}) + m \cdot (x_{p_3} - x_{p_1}) + n \cdot (x_{p_1} - x_{p_2});$$

$$d = k \cdot (x_{p_2} \cdot y_{p_3} - x_{p_3} \cdot y_{p_2}) + m \cdot (x_{p_3} \cdot y_{p_1} - x_{p_1} \cdot y_{p_3}) + n \cdot (x_{p_1} \cdot y_{p_2} - x_{p_2} \cdot y_{p_1}).$$

Условие Делоне не выполняется при выполнении соотношения

$$a \cdot (x_{p_0}^2 + y_{p_0}^2) - b \cdot x_{p_0} + c \cdot y_{p_0} < d$$

и требуется перестроение двух рассматриваемых треугольников.

Говорят, что треугольник триангуляции удовлетворяет условию Делоне, если этому условию удовлетворяет триангуляция, составленная только из этого треугольника и трех его соседей (если они существуют, т.е. рассматриваемый треугольник не примыкает к границе области) [4].

Следовательно, проверив рассматриваемый треугольник на выполнение условия Делоне по отношению к трем смежным треугольникам, и, при необходимости, проведя перестроения, мы можем утверждать, что треугольник удовлетворяет условию Делоне.

Таким образом, важнейшим свойством триангуляции Делоне является то, что она может быть получена из любой другой выпуклой триангуляции последовательным перестроением пар соседних треугольников, не удовлетворяющих условию Делоне.

Алгоритм построения триангуляции Делоне

Существует несколько способов построения триангуляции Делоне. Все они сводятся к последовательному добавлению точек в частично построенную триангуляцию Делоне и проверке условия Делоне для вновь образовавшихся треугольников. В случае невыполнения этого условия производятся необходимые перестроения до тех пор, пока триангуляция снова не будет полностью удовлетворять условию Делоне [4].

Изначально триангуляция строится на минимальном наборе точек. При добавлении каждой новой точки определяется ее местоположение в триангуляции (локализация) и происходит построение новых треугольников. При этом возможны две ситуации: добавляемая точка попадает внутрь или вне триангуляции. В первом случае делению на несколько новых треугольников подлежит треугольник, внутри которого оказалась добавляемая точка. Во втором случае необходимо

построение дополнительных, внешних к текущей триангуляции, треугольников, причем их количество заранее не определено, а процедура построения довольно сложна. Для упрощения алгоритма добавления новой точки в триангуляцию необходимо гарантировать, что все точки, добавляемые в триангуляцию, будут расположены внутри нее. Для этого в качестве первоначального набора точек необходимо взять только точки, принадлежащие выпуклой оболочке исходного множества точек, и построить на этом наборе триангуляцию Делоне. После добавления каждой новой точки производится проверка условия Делоне для всех вновь образованных пар треугольников. Если для какой-либо пары условие не выполняется, происходит перестроение этой пары.

Рассмотрим построение триангуляции более подробно.

Исходные данные заданы в виде списка точек (узлов будущей триангуляции). Каждая точка представляет собой набор трех значений: координат точки на плоскости и некоторого значения в этой точке (далее именуемого высотой).

Подготовительный этап: построение выпуклой оболочки

На первом этапе построения определяется точка, явно принадлежащая выпуклой оболочке. Она должна иметь максимальное значение по оси ординат. Если таких точек несколько, то из их числа выбирается та, которая имеет минимальное значение по оси абсцисс (рис. 1, точка 1). Найденная точка добавляется в выпуклую оболочку.

Далее происходит процесс, именуемый «заворачиванием». Сравниваются углы между базовым вектором, соединяющим предпоследнюю и последнюю точки выпуклой оболочки, и всеми возможными векторами, соединяющими последнюю точку выпуклой оболочки со всеми существующими точками (рис. 1а). Надо заметить, что на первом шаге выпуклая оболочка содержит только одну точку, поэтому в качестве базового вектора берется горизонтальный вектор произвольной длины, направленный влево и приходящий в точку 1. Та точка, при рассмотрении которой угол между векторами оказался минимален, и будет следующей точкой выпуклой оболочки. Процесс повторяется до тех пор, пока вновь найденная точка не будет являться первой точкой выпуклой оболочки (рис. 1б). Все точки, не попавшие в состав выпуклой оболочки, будут внутренними для этой оболочки.

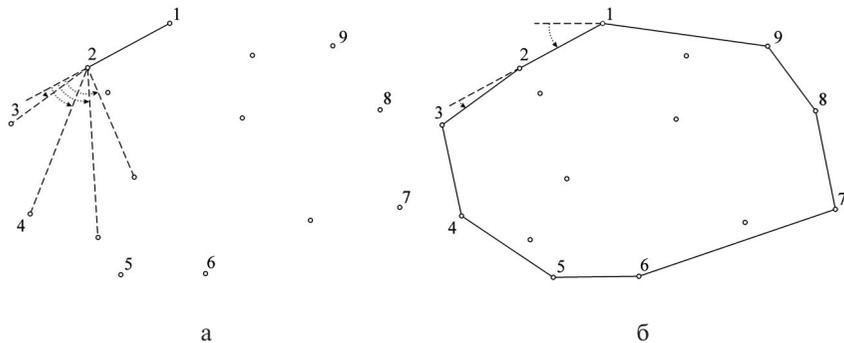


Рис. 1. Построение выпуклой оболочки.

Построение триангуляции Делоне

Начальная триангуляция Делоне строится на основе только тех точек, которые принадлежат выпуклой оболочке. Создаются треугольники, одной из вершин которых является первая точка выпуклой оболочки, а двумя остальными – все возможные пары соседних точек выпуклой оболочки. Далее выполняется проверка выполнения условия Делоне для всех пар треугольников. Пары треугольников, не удовлетворяющие условию, перестраиваются.

После того, как первоначальная триангуляция построена, производится последовательное добавление точек, еще не включенных в триангуляцию. Каждая новая точка локализуется, и происходит добавление новых треугольников. После чего выполняется процесс проверки условия Делоне для всех вновь образованных пар треугольников и делаются необходимые перестроения.

Следует заметить, что самым трудоемким шагом этого этапа является локализация точки. Нелинейность зависимости времени локализации точки от количества точек, уже включенных в триангуляцию при последовательном переборе треугольников, очень сильно выражена. Для сокращения времени перебора применяется метод динамического кэширования поиска.

Строится кэш – специальная структура, позволяющая за короткое время найти некоторый треугольник, близкий к искомому. Кэш представляет собой сетку (рис. 2а), в каждой ячейке которой находится

ссылка на некоторый треугольник триангуляции. Ссылка ячейки обновляется в момент добавления нового или при перестроении уже существующего треугольника, центр масс которого расположен в пределах этой ячейки. В результате перестроений на какие-то треугольники могут ссылаться несколько ячеек, а на другие может не быть ни одной ссылки.

Далее в окрестности найденного треугольника производится поиск искомого треугольника (рис. 2б). Алгоритм поиска выглядит следующим образом. Проверке подлежат треугольники, смежные треугольнику, найденному при помощи кэша. Если среди них нет искомого треугольника, в очередь поиска добавляются треугольники, смежные с только что проверенными треугольниками, за исключением тех, по ссылке с которых мы перешли на данные треугольники. Процесс продолжается до тех пор, пока искомым треугольник не будет обнаружен.

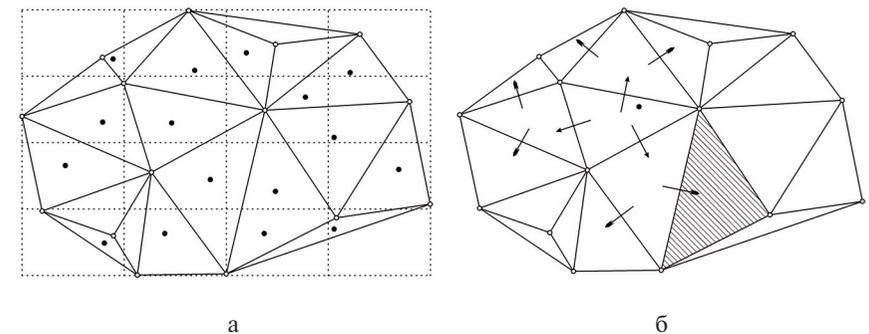


Рис. 2. Локализация точки: а) кэш. Черная точка обозначает ссылку ячейки кэша на треугольник, с которого начинается локализация точки; б) процесс локализации. Закрашенный треугольник – искомый.

Для увеличения скорости работы кэша используется метод динамического кэширования. Суть этого метода заключается в создании кэша динамически изменяемого размера. Размер кэша зависит от количества точек триангуляции. При добавлении в триангуляцию новых точек, при достижении некоторого их порогового количества, разбиение кэша увеличивается в два раза по обеим осям координат. При этом информация из старого кэша переписывается в новый. Для

большинства случайных распределений этот алгоритм работает значительно быстрее многих других алгоритмов [4].

В качестве начального размера кэша берем сетку $m \times m$, где m кратно 2, причем m – максимально возможное число, меньшее, чем $2 \cdot \sqrt{\frac{n}{R}}$, где n – количество точек, заносимых в кэш первоначально, $R = 3$ – константа, задающая скорость роста кэша. Ее оптимальное значение определяется опытным путем.

Так же определяется очередное пороговое значение, при достижении которого произойдет увеличение кэша: $R \cdot m^2$.

В большинстве случаев рассматриваемая точка локализуется довольно быстро. Алгоритм динамического кэширования обеспечивает теоретически минимальное время работы, порядка $O(N \cdot \log N)$, где N – количество точек сетки. Но в случае неудачного задания параметров кэша возможна ситуация, когда поиск указанным методом окажется неэффективен. Это может произойти, если искомым треугольник будет расположен довольно далеко от треугольника, на который ссылается кэш. Поиск при динамическом кэшировании устроен так, что каждая новая итерация поиска задействует в два раза больше направлений, чем предыдущая. Причем, чем больше прошло итераций, тем больше происходит проверок треугольников, проверенных ранее. Для того чтобы избежать такого эффекта, следует ввести ограничение на количество итераций. При достижении заданного предельного значения количества итераций перейти к поиску треугольника последовательным перебором. В целом задачу построения триангуляции удалось решить достаточно эффективно (рис. 3).

Повышение детализации

Часто детализации триангуляции, построенной на исходных данных, не достаточно для полноценного построения изолиний. Необходимо искусственное повышение детализации путем более мелкого разбиения треугольников. Степень детализации зависит от заданного параметра разбиения ε , т.е. разбиению подлежат все стороны треугольников, длина которых больше этого параметра.

Для уменьшения количества искажений процесс разбиения проводится в несколько этапов. В качестве начального параметра



Рис. 3. Затраты времени на построение триангуляции Делоне на разных компьютерах.

разбиения берется значение, равное половине длины самого длинного ребра триангуляции. На каждом новом этапе текущий параметр разбиения уменьшается вдвое до тех пор, пока не станет равным параметру разбиения ε .

Разбиение заканчивается, когда после очередного этапа не осталось ни одного ребра, подлежащего разбиению.

При разбиении ребра триангуляции происходит добавление нового узла. Возникает задача определения его высоты. Простая линейная интерполяция по высотам смежных узлов практически не имеет смысла, поэтому используется метод кубической интерполяции [3].

Для начала необходимо найти векторы нормалей $N1$ и $N2$ к искомой поверхности в узлах 1 и 2 соответственно (рис. 4). Под вектором нормали в узле будем понимать среднее значение нормалей всех смежных с узлом треугольников с учетом их веса. В качестве веса треугольника будем использовать величину $\frac{2 \cdot S}{a} \cdot \ln \frac{p}{p-a}$, где S – площадь треугольника; p – его полупериметр; a – длина стороны, противолежащей рассматриваемому узлу. Опытным путем получено, что такой вес позволяет адекватно учесть конфигурацию треугольника.

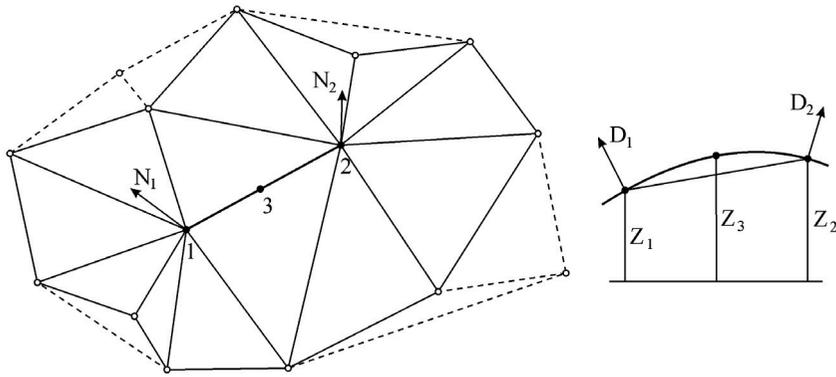


Рис. 4. Вычисление высоты в добавляемом узле триангуляции (точка 3).
Слева – вид сверху, справа – вертикальный разрез.

Обозначим: $P1$, $P2$ – точки 1 и 2 соответственно, а отрезок, соединяющий точки $P1$ и $P2$, – 1–2.

Находим $N12$ – нормаль к вертикальной плоскости, в которой лежит отрезок 1–2, соединяющий точки 1 и 2:

$$\begin{aligned} x_{N12} &= y_{P2} - y_{P1}; \\ y_{N12} &= -x_{P2} - x_{P1}; \\ z_{N12} &= 0. \end{aligned}$$

Находим $D1$ и $D2$ – проекции векторов $N1$ и $N2$ на вертикальную плоскость, проходящую через отрезок 1–2 (рис. 4). Для этого вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned} D1 &= N1 \times N12; \\ D2 &= N2 \times N12. \end{aligned}$$

Определяем длину проекции отрезка 1–2 на горизонтальную плоскость:

$$l = \sqrt{(x_{P2} - x_{P1})^2 + (y_{P2} - y_{P1})^2}.$$

Определяем производные на концах отрезка 1–2:

$$\begin{aligned} z_{P1}' &= \frac{z_{D1}}{\sqrt{x_{D1}^2 + y_{D1}^2}}; \\ z_{P2}' &= \frac{z_{D2}}{\sqrt{x_{D2}^2 + y_{D2}^2}}. \end{aligned}$$

Значение кубического сплайна в центре отрезка 1–2 задается формулой:

$$z_{P3} = \frac{(z_{P1}' + z_{P2}') \cdot l - 2 \cdot z_{P2} - z_{P1}}{8} + \frac{3 \cdot (z_{P2} - z_{P1}) - (2 \cdot z_{P1}' + z_{P2}') \cdot l}{4} + \frac{z_{P1}' \cdot l}{2} + z_{P1},$$

где z_{P3} – искомая высота в центре отрезка 1–2 [2, 3].

На краях триангуляции возможно существование сильно вытянутых треугольников. Вызвано это тем, что при построении выпуклой оболочки расстояние между ближайшими точками этой оболочки может значительно превосходить среднюю длину дуг триангуляции. Такие треугольники не всегда корректно описывают поверхность, заданную исходными данными, тем самым, при участии в математических расчетах, искажая общую картину. Для устранения этого эффекта необходимо отслеживать такие треугольники и исключать их из расчетов.

Одним из способов выявления такого треугольника является проверка косинусов его углов. Если косинус хотя бы одного угла проверяемого треугольника больше заданного значения (например 0,99), треугольник считается некорректным и исключается.

Процесс повышения детализации для исходной триангуляции показан на рис. 5. Для большей наглядности на рисунке показаны также изолинии, которые можно рассчитать при соответствующем уровне детализации.

Построение изолиний

Алгоритм построения изолинии следующий:

- 1) выбираем определенное значение изолинии h ;
- 2) проводим проверку, присутствует ли в триангуляции хотя бы один узел, у которого значение высоты совпадает со значением изолинии h . В случае существования такого узла, значение изолинии уменьшается на некоторое маленькое значение dh и п. 2 повторяется;

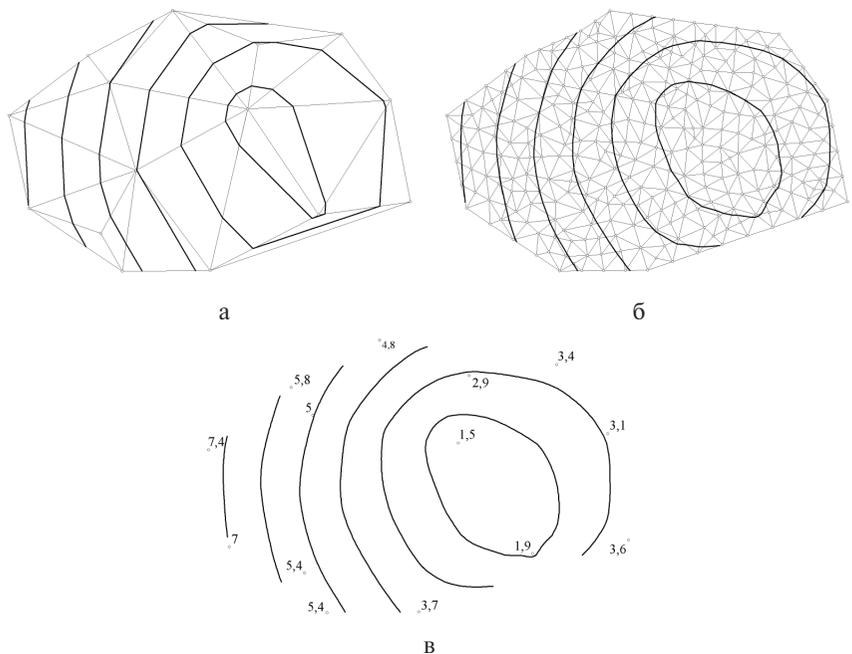


Рис. 5. Повышение детализации исходной триангуляции Делоне:

- а) триангуляция по исходным точкам; б) один из промежуточных этапов;
- в) изолинии при окончательном уровне детализации.

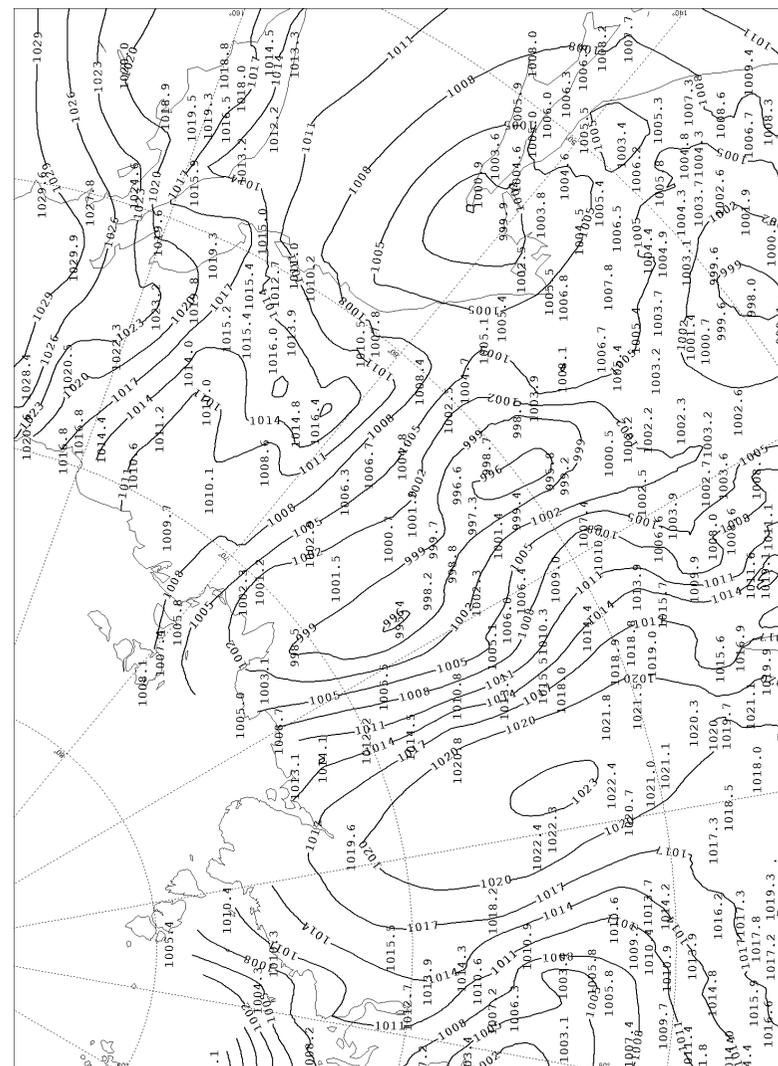
3) все треугольники, через которые проходит изолиния со значением h , помечаются;

4) происходит поиск первого отмеченного треугольника; заводится массив для хранения узлов изолинии;

5) отслеживается путь изолинии в обе стороны от текущего треугольника. Найденные узлы добавляются в массив. Процесс идет до тех пор, пока изолиния не замкнется или не выйдет на границу триангуляции. Со всех треугольников, участвующих в обходе, отметка снимается;

6) пункты 4 и 5 повторяются до тех пор, пока не закончатся помеченные треугольники.

На рис. 6 приведен пример карты с изолиниями, рассчитанными по описанному алгоритму, и наноской наблюдений соответствующего метеоэлемента.



Построение изоконтуров

Изоконтуром между уровнями высот h_1 и h_2 называют замыкание геометрического места точек на поверхности, имеющих высоту $h \in [h_1, h_2)$ [4]. Изоконтуры строятся на основе изолиний. Замкнутые изолинии уже являются изоконтурами и сразу добавляются в список изоконтуров.

Формируется граф, в качестве узлов которого выступают точки выхода незамкнутых изолиний на границу триангуляции, а в качестве ребер – сами незамкнутые изолинии (ребра первого типа) и кусочки граничной оболочки (ребра второго типа), на которые граничная оболочка была разделена точками выхода. Причем каждая незамкнутая изолиния входит в граф два раза – в виде двух одинаковых ребер, но ориентированных в разные стороны. А ребра, полученные из кусочков граничной оболочки, ориентируются так, чтобы внутренность триангуляции находилась справа по ходу движения при обходе триангуляции по граничной оболочке. В результате в каждом узле графа сходятся два ребра первого типа и два ребра второго типа.

Сборка каждого очередного изоконтура начинается из любого узла, имеющего ребра, и заключается в последовательном обходе ребер графа с учетом их ориентации, и с обязательным чередованием типа ребер. При попадании в узел графа, с которого начинался обход, изоконтур считается собранным, а ребра, использованные в обходе, удаляются из дальнейшего рассмотрения.

Для каждого собранного контура определяется, какому диапазону высот он принадлежит. Для этого используем любое ребро триангуляции, принадлежащее выпуклой оболочке и использованное для построения рассматриваемого изоконтура.

Для того чтобы при графическом отображении набора изоконтуров все они были видны, вначале необходимо рисовать изоконтуры, полученные из незамкнутых изолиний. Остальные изоконтуры перед рисованием следует подвергнуть сортировке по их площади в направлении убывания.

Площадь изоконтура может быть вычислена по формуле $S = 0,5 \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot (y_{i-1} - y_{i+1})$ с учетом знака получающихся разностей. Здесь S – вычисляемая площадь изоконтура; n – количество точек,

задающих изоконтур; x_i – абсцисса i -й точки; y_i – ордината i -й точки.

Таким образом, в системе визуализации гидрометеорологических данных Isograph реализован алгоритм расчета изолиний и изоконтуров по данным в нерегулярной сети точек.

Работа выполнялась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям в рамках Федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 гг.» по составной части темы «МЕГАПОЛИС – интегрированные технологии оценки загрязнения атмосферы крупных городов в региональном и глобальном масштабах на основе аэрокосмического и наземного мониторинга для уменьшения негативных последствий антропогенных воздействий».

Список использованных источников

1. Алферов Ю.В. Автоматизированная графическая система для визуализации результатов численных прогнозов // Труды Гидрометцентра России. – 2003. – Вып. 338. – С. 119–124.
2. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е издание. – М.: ИД «Вильямс», 2005. – 1296 с.
3. Костюк Ю.Л., Фукс А.Л. Визуально гладкая аппроксимация однозначной поверхности, заданной нерегулярным набором точек // Труды Международной научно-практической конференции. Геоинформатика. – Томск: Изд-во Томского университета, 2000. С. 41–45.
4. Скворцов А.В. Триангуляция Делоне и ее применение. – Томск: Изд-во Томского университета, 2002. – 128 с.

Поступила в редакцию 20.05.2011 г.