

*О.В. Евтеев, М.В. Шатунова,
В.Л. Перов, Л.Р. Дмитриева-Арраго*

ВЛИЯНИЕ ВАРИАЦИЙ КОМПОНЕНТ ТЕПЛОВОГО БАЛАНСА НА ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ТЕМПЕРАТУРУ ПОВЕРХНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ С МОДЕЛЬЮ COSMO-RU ГИДРОМЕТЦЕНТРА РОССИИ

Введение

Недостаток и неточность информации о характеристиках атмосферы и подстилающей поверхности является одной из причин ошибок в моделях прогноза погоды при расчете метеорологических полей, в частности температуры подстилающей поверхности – ключевого метеоэлемента для расчета характеристик приземного и пограничного слоев атмосферы. В моделях прогноза погоды температура подстилающей поверхности определяется из уравнения теплопроводности почвы, записанного для верхнего слоя почвы, в котором в качестве источника используется баланс тепла в верхнем слое почвы. Погрешности в расчете компонент теплового баланса связаны не только с приближенностью применяемых алгоритмов, но и с погрешностями параметров, входящих в алгоритмы, как прогнозируемых, так и заданных характерными значениями, известными по данным натурных наблюдений.

В статье представлены методы расчета компонент теплового баланса. Проведено сравнение компонент баланса для конкретных условий. Основное внимание уделено радиационному балансу поверхности и турбулентным потокам тепла на границе почва–атмосфера.

Выполнен анализ суточного хода компонент радиационного баланса и температуры подстилающей поверхности для облачных условий.

Для теплового баланса подстилающей поверхности, в первую очередь для поглощенной коротковолновой радиации, недостаток и неточность информации связаны с погрешностями в расчете количества облаков и их водности. Недостаток информации при вычислении турбулентных потоков явного и скрытого тепла на поверхности связан с неопределенностью в расчете коэффициента турбулентного обмена между подстилающей поверхностью и атмосферой. Приведены результаты исследования влияния вариаций указанных выше параметров на изменения температуры подстилающей поверхности. Для численных экспериментов использована негидростатическая гидродинамическая модель прогноза погоды на ограниченной территории COSMO-RU Гидрометцентра России [1, 4–6].

Исследования выполнены с вариантом модели с горизонтальным разрешением 14 км и вертикальным разрешением 40 уровней, верхняя граница модели находилась на высоте около 25 км. Количество узлов сетки на каждом горизонтальном уровне равнялось 361×321. Расчеты проводились на компьютере SGI, Altix 4700 Вычислительного центра Росгидромета.

Основной целью являлось определение зависимости температуры подстилающей поверхности от вариаций компонент теплового баланса. Выполнено исследование влияния погрешностей в расчете водности на компоненты радиационного баланса и температуру подстилающей поверхности. Рассмотрено влияние вариаций коэффициента турбулентного обмена на температуру поверхности.

В заключении статьи приведены выводы о влиянии вариаций различных потоков и параметров, входящих в краевые условия для уравнения переноса тепла в почве, на вариации температуры поверхности. Полученные результаты являются основой для улучшения расчета температуры поверхности в гидродинамических моделях прогноза погоды.

1. Баланс тепла на подстилающей поверхности

Тепловой режим земной поверхности формируется под влиянием результирующего притока тепла на поверхность, который зависит от характеристик атмосферы, подстилающей поверхности и почвы.

Солнечная радиация, поступающая на земную поверхность, частично поглощается в тонком слое почвы, частично отражается обратно в атмосферу. Кроме потока солнечной радиации, земная поверхность получает тепло в виде инфракрасной радиации от атмосферы и теряет тепло путем собственного теплового излучения. Наряду с радиацией, на баланс тепла подстилающей поверхности влияют турбулентные потоки тепла и влаги (затраты тепла на испарение) на границе атмосфера-суша, а также перенос тепла в почве.

Основное уравнение для расчета температуры почвы – уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T_{so}}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T_{so}}{\partial z} \right), \quad (1)$$

где T_{so} – температура верхнего слоя почвы; ρ – плотность почвы; c – ее теплоемкость; λ – коэффициент теплопроводности почвы. В качестве верхнего граничного условия (на верхней границе почвы) задаются потоки излучения и турбулентные потоки явного и скрытого тепла. Нижнее граничное условие для уравнения теплопроводности в почве задается в виде климатической температуры в нижнем слое – эта температура принята постоянной во времени, но разной в разных узлах сетки.

Для решения уравнения (1) используются уровни $z_{hk} = 0,01 \cdot 3^{(k-1)}$ (м) при $k = 1, 2, \dots, 8$ – число слоев в почве.

На верхней границе почвы тепловой поток $\lambda \frac{\partial T_{so}}{\partial z}$ рассчитывается в виде суммы радиационного баланса и турбулентных потоков явного и скрытого тепла. Тогда уравнение (1) для верхнего слоя почвы можно записать:

$$\left(\frac{\partial T_{so}}{\partial t} \right)_{k=1} = \frac{1}{\rho c \Delta z_1} \left[\lambda \frac{(T_{so})_{k=2} - (T_{so})_{k=1}}{z_{m,2} - z_{m,1}} + G_{sfc} \right], \quad (2)$$

$$G_{sfc} = H_{sfc} + F_{q\ sfc} + Q_{rad,net}. \quad (3)$$

Здесь H_{sfc} – поток явного тепла; $F_{q\ sfc}$ – поток скрытого тепла; $Q_{rad,net}$ – радиационный баланс поверхности почвы.

Под влиянием турбулентного теплообмена с атмосферой почва теряет (получает) количество явного тепла, равное

$$H_{sfc} = \rho c_p C_h^d |v_h| (T_a - T_{sfc}), \quad (4)$$

где ρ – плотность воздуха; C_h^d – коэффициент турбулентного теплообмена; $|v_h|$ – модуль скорости ветра; $(T_a - T_{sfc})$ – разность между температурой воздуха на нижнем расчетном уровне модели атмосферы и температурой поверхности; c_p – теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

Поток скрытого тепла (затраты тепла на испарение) определяется как суммарное испарение:

$$F_{q\ sfc} = \rho C_q^d |v_h| (q - q_{sfc}), \quad (5)$$

где ρ – плотность воздуха; C_q^d – коэффициент турбулентного влагообмена; $(q - q_{sfc})$ – разность между влажностью воздуха на нижнем расчетном уровне модели атмосферы и влажностью на поверхности.

Приходную часть радиационного баланса поверхности составляет поглощенная ею прямая и рассеянная солнечная (коротковолновая) радиация плюс тепловой поток от атмосферы, а расходную часть – тепловое излучение земной поверхности.

Метод расчета радиационного баланса в модели COSMO-RU основан на решении уравнения переноса излучения в двухпоточном приближении с учетом эффектов рассеяния, поглощения и эмиссии излучения атмосферными газами, облаками и аэрозолями [7]. При описании переноса солнечного или длинноволнового излучения в рассеивающей и поглощающей атмосфере с помощью двухпоточного метода основная система уравнений для потоков излучения имеет вид:

$$\frac{dF^\uparrow}{d\tau} = \alpha_1 F^\uparrow(\tau) - \alpha_2 F^\downarrow(\tau) - \alpha_3 J,$$

$$\frac{dF^\downarrow}{d\tau} = \alpha_2 F^\uparrow - \alpha_1 F^\downarrow + \alpha_4 J, \quad (6)$$

$$\frac{dS}{d\tau} = S/\mu_0.$$

Здесь F^{\uparrow} и F^{\downarrow} – потоки диффузного излучения, направленные вверх и вниз; S – поток прямого солнечного излучения; коэффициенты α_1 – α_4 есть функции оптических свойств слоев атмосферы: оптической толщины τ , альбедо однократного рассеяния и параметра вытянутости индикатрисы рассеяния; μ_0 – синус высоты Солнца. Для солнечного излучения $J = S/\mu_0$, для длинноволнового $J = \pi B$, где B – излучение абсолютно черного тела.

Решение системы уравнений (6), записанных для каждого слоя атмосферы, сводится к решению системы алгебраических уравнений для вычисления неизвестных потоков на границах слоев в многослойной атмосфере в зависимости от коэффициентов, характеризующих каждый слой атмосферы. Зная потоки солнечного и длинноволнового излучения, можно получить величины радиационного баланса.

2. Сравнение компонент теплового баланса

Компоненты теплового баланса поверхности по результатам расчетов в модели COSMO-RU представлены в таблице. В последнем столбце таблицы для разных условий представлены суммы потоков – баланс. Атмосферные потоки, имеющие знак минус, направлены вверх от поверхности, т.е. поверхность отдает тепло. Поток тепла в почве, имеющий знак минус, направлен от поверхности внутрь почвы. Все положительные потоки действуют в сторону нагревания. Сравнение величин потоков позволяет судить об их значимости для расчета температуры. Сумма потоков представляет собой источник, который определяет изменение температуры на подстилающей поверхности из уравнения теплопроводности почвы. В этом смысле сравнение потоков представляет интерес для оценок необходимой точности расчета отдельных компонент.

Из таблицы видно, что максимальное количество поглощенной радиации имеет место летом в безоблачном случае, а минимальное – зимой при наличии облаков. Различия составляют 800 Вт/м^2 . Эти различия связаны не только с высотой Солнца, но и с альбедо подстилающей поверхности, которое зимой при наличии снега оставляет мало энергии для поглощения поверхностью. Видно, что как зимой, так и летом количество поглощенной радиации при наличии облачности

Таблица

Сравнение компонент теплового баланса поверхности (Вт/м^2)

Зима						Лето					
Sr	Lr	H	F	S_f	баланс	Sr	Lr	H	F	S_f	баланс
Безоблачный случай						Безоблачный случай					
232	-118	-56	-8	3	53	845	-194	-418	-55	149	327
Облачный случай						Облачный случай					
39	-3	-2	-2	-5	27	43	-5	-9	-19	-4	6

Примечание. Sr – поглощенная коротковолновая радиация; Lr – эффективное излучение; H – турбулентный поток явного тепла; F – затраты тепла на испарение; S_f – поток тепла в почву.

сильно уменьшается. Этот эффект рассмотрен в работе [3], где показано, что ослабление солнечной радиации, приходящей на верхнюю границу облака, существенно зависит от водности облака, например, при водности $0,2 \text{ г/м}^3$ ослабление достигает 15–20 раз. Эффективное излучение охлаждает поверхность. В безоблачных условиях потоки теплового излучения от поверхности существенно превышают компенсирующие потоки ИК-излучения сверху от атмосферы. В облачных условиях четко виден утепляющий эффект облачности и зимой, и летом, который состоит в уменьшении эффективного излучения при наличии облаков за счет увеличения потоков сверху. Турбулентные потоки тепла от подстилающей поверхности максимальны в безоблачных условиях летом и по величине равны половине приходящего потока солнечного излучения. В зимних условиях турбулентный поток в безоблачных условиях также сравним с поглощенной солнечной радиацией. Поток в почву, наибольший летом, в безоблачных условиях приводит к значительному нагреванию поверхности. Приведенная сумма потоков (баланс) в результате определяет изменение температуры в уравнении теплопроводности почвы.

Точность расчета баланса и прогноза изменений температуры зависит от точности расчета отдельных компонент уравнения теплового баланса. В некоторых случаях баланс рассчитывается как малая разность величин одного порядка, например, облачный случай летом и безоблачный случай зимой. В этих случаях точность расчета отдельных компонент приобретает особое значение.

3. Анализ суточного хода компонент радиационного баланса и водности облаков по результатам модели COSMO-RU

На рис. 1 представлен суточный ход интегральной водности, эффективного излучения, поглощенной коротковолновой радиации и температуры подстилающей поверхности в условиях сплошной облачности для точки с координатами $\lambda=38^\circ$ в.д и $\varphi=67^\circ$ с.ш.

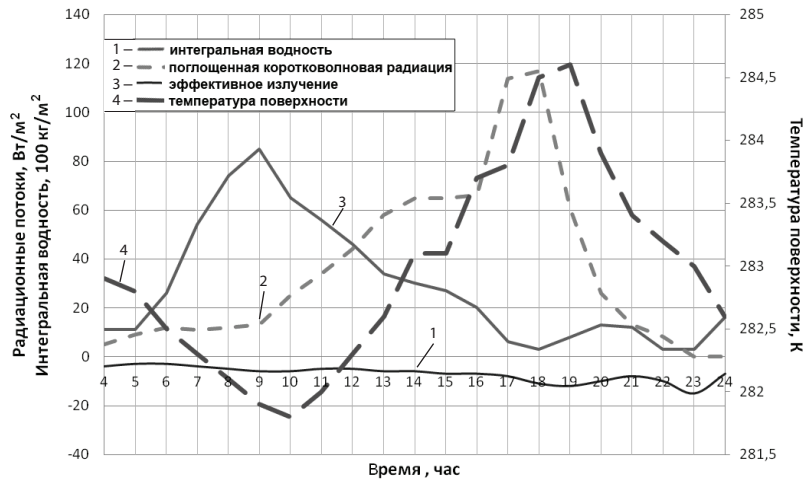


Рис 1. Суточный ход интегральной водности, эффективного излучения, поглощенной коротковолновой радиации и температуры подстилающей поверхности для облачного случая 17.07.2009 года

Из рисунка видно, что изменение интегральной водности облаков определяет изменение в суточном ходе компонент радиационного баланса и температуры поверхности. Значение интегральной водности максимально в 9 ч утра и составляет $0,8 \text{ кг/м}^2$, далее значение падает до $0,3 \text{ кг/м}^2$ в 18 ч вечера. В соответствии с этим поглощенная коротковолновая радиация достигает максимального значения в 18 ч, когда значение интегральной водности в облаках минимально. Наибольшее абсолютное значение эффективного излучения появляется при минимальном значении водности в 18 и 23 ч. Из рисунка следует, что в те моменты времени, когда интегральная водность облаков достигает наибольших значений, эффективное излучение и поглощенная

поверхностью коротковолновая радиация имеют минимальные значения. Можно видеть также, что изменения температуры поверхности следуют за изменением поглощенной коротковолновой радиации. Минимальное значение температуры, которое составляет 281 К, приходится на 10 ч утра, когда значение поглощенной солнечной радиации также минимально и составляет 20 Вт/м^2 . Максимум температуры поверхности наблюдается в период с 18 до 19 ч и имеет значение примерно 284 К. В этот же момент времени (18 ч) максимально значение поглощенной коротковолновой радиации — 117 Вт/м^2 . При максимальной водности отсюда следует, что суточный ход интегральной водности регулирует суточный ход температуры.

4. Численные эксперименты по исследованию чувствительности температуры подстилающей поверхности в модели COSMO-RU

4.1. Исследование чувствительности температуры поверхности к вариациям водности облаков

Прогноз характеристик облачности в моделях прогноза погоды представляет собой сложную задачу.

Во-первых, трудность состоит в определении количества облаков и прогнозе самого факта появления облачности в гидродинамической модели прогноза погоды. Сложность заключается в том, что необходимо определить степень покрытия облаками ячейки конечно-расчетной сетки модели, имея информацию о температуре и влажности только в узле сетки. Решение этой задачи требует дополнительных гипотез о характере распределения характеристик влажности и температуры в пределах ячейки сетки. До сих пор широко используется предложенное Дж. Смагоринским [8] соотношение между относительной влажностью, рассчитанной в узле сетке, и количеством облаков. Это соотношение основано на обобщении данных наблюдений. Сам факт появления облачности регулируется критическим значением относительной влажности, которое, по-существу, является настраивающим фактором модели, что продемонстрировано в работе [2], где представлено вертикальное распределение критической относительной влажности, используемое в различных гидродинамических моделях прогноза погоды.

Другая трудность заключается в прогнозе водности облаков, которая в современных моделях прогноза погоды рассчитывается из уравнения переноса. В связи с отсутствием регулярной информации о водности в реальных условиях уравнение переноса водности не обеспечено начальными и граничными условиями, а также имеет погрешности в расчете источников эволюции водности в уравнении переноса.

Таким образом, в расчете количества облаков и водности в гидродинамической модели прогноза погоды присутствуют погрешности, которые приводят к погрешностям в определении компонент теплового баланса подстилающей поверхности.

Для оценки влияния погрешностей расчета водности на прогноз температуры поверхности были проведены эксперименты с моделью COSMO-RU. В двух экспериментах были получены поля температуры подстилающей поверхности в результате интегрирования модели на 9 часов от 00 ч ВСВ 17.07.2009 года. Первый эксперимент – фоновый. Во втором эксперименте прогностическая интегральная водность была увеличена на 25 %. Изменения проводились только в радиационном блоке и не затрагивали расчет микрофизических параметров и осадков. На рис. 2 представлено пространственное распределение разности полей температуры, полученных в двух экспериментах, и поле общей облачности, полученное во втором эксперименте через 9 часов интегрирования модели на момент 09 ч ВСВ 17.07.2009 года для Центрального района России.

Как видно из рис. 2а, общий фон изменения температуры отрицательный, т.е. имеет место понижение температуры практически во всей рассматриваемой области, причем максимальное понижение составляет 3–4 К. В верхней части рассматриваемой области при одинаковом количестве общей облачности, составляющей 80–100 % (рис. 2б), в двух экспериментах разность температуры поверхности, обусловленная изменением интегральной водности, достигает 1–2 К.

Появление отдельных областей с повышением температуры связано с уменьшением количества облаков в процессе интегрирования модели во втором эксперименте, в котором участвовало измененное поле температуры поверхности, влиявшее на формирование облачности.

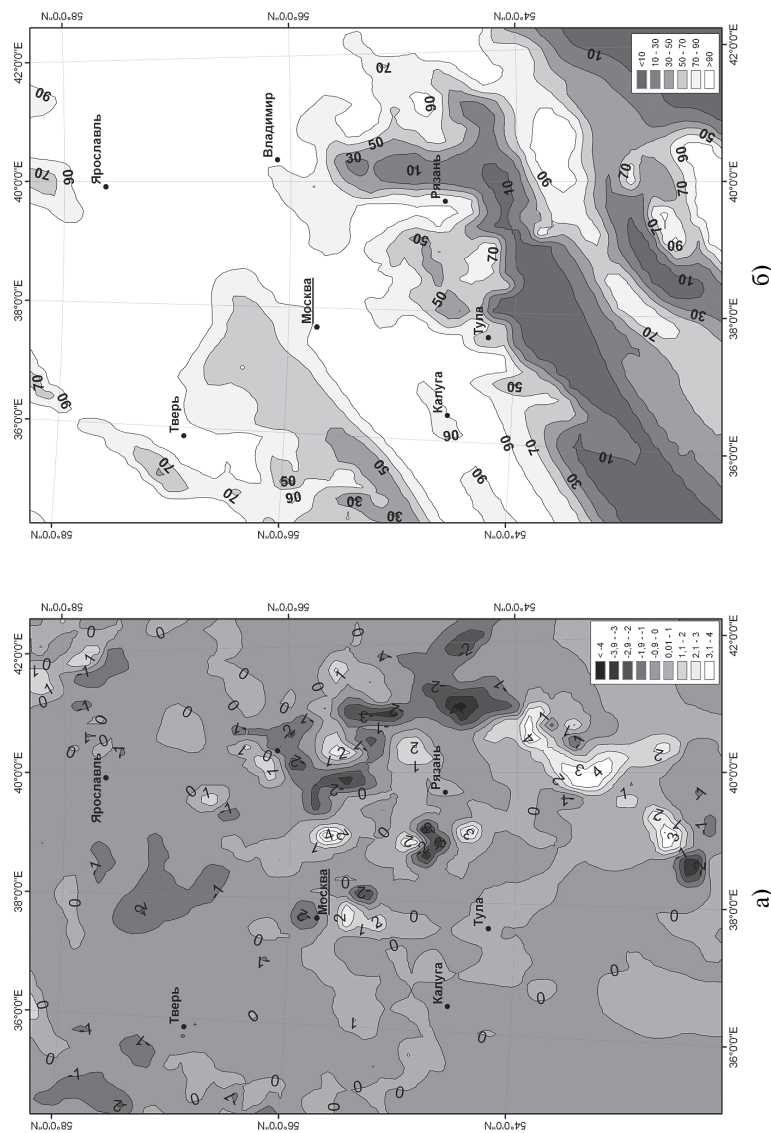


Рис. 2. Разность полей температуры поверхности за счет увеличения на 25 % интегральной водности облаков (а) и суммарный облачный покров в варианте с увеличенной водностью (б) для Центрального района России 17.07.2009 г., 09 ч ВСВ

4.2. Исследование чувствительности температуры поверхности к вариациям коэффициента турбулентного обмена

Алгоритм расчета коэффициента турбулентного обмена также имеет источники погрешностей. Среди них можно отметить метод расчета пути смешения, который является предметом изучения специалистов и может привести к погрешностям при расчете коэффициентов турбулентности. Кроме того, точно не известно значение коэффициента турбулентного теплообмена на поверхности.

В экспериментах с моделью COSMO-RU проведено увеличение коэффициента турбулентного обмена на 25 % относительно исходных значений в контрольном эксперименте во всех расчетных точках. Интегрирование модели выполнено на 9 часов от 00 ч ВСВ 17.07.2009 года. Разность полей температуры подстилающей поверхности, полученных в двух экспериментах – контрольном и с увеличенным коэффициентом турбулентного обмена представлена на рис. 3.

Из рисунка видно, что во всей рассматриваемой области имеется понижение температуры поверхности. Особенно четко это видно в районе севернее Каспийского моря, где отсутствовала или была незначительная облачность, влияние увеличения коэффициента турбулентного обмена максимально. Понижение температуры в этом районе достигает 3 К. Этот результат вполне очевиден, поскольку усиление турбулентного потока явного тепла усиливает отток тепла от поверхности. Имеющиеся области с повышением температуры, вероятно, связаны с механизмом обратных связей в модели.

4.3. Исследование чувствительности температуры поверхности к вариациям потока коротковолновой радиации, приходящей на подстилающую поверхность в летних условиях

Как видно из рис. 1, вариации поглощенной коротковолновой радиации на подстилающей поверхности являются ведущим фактором в изменении температуры поверхности. Оценки, приведенные в [3], показали, что неопределенность в параметрах, связанных с микрофизическими свойствами облаков и с расчетом количества облаков, может привести к изменению поглощенной коротковолновой радиации на 20–30 Вт/м².

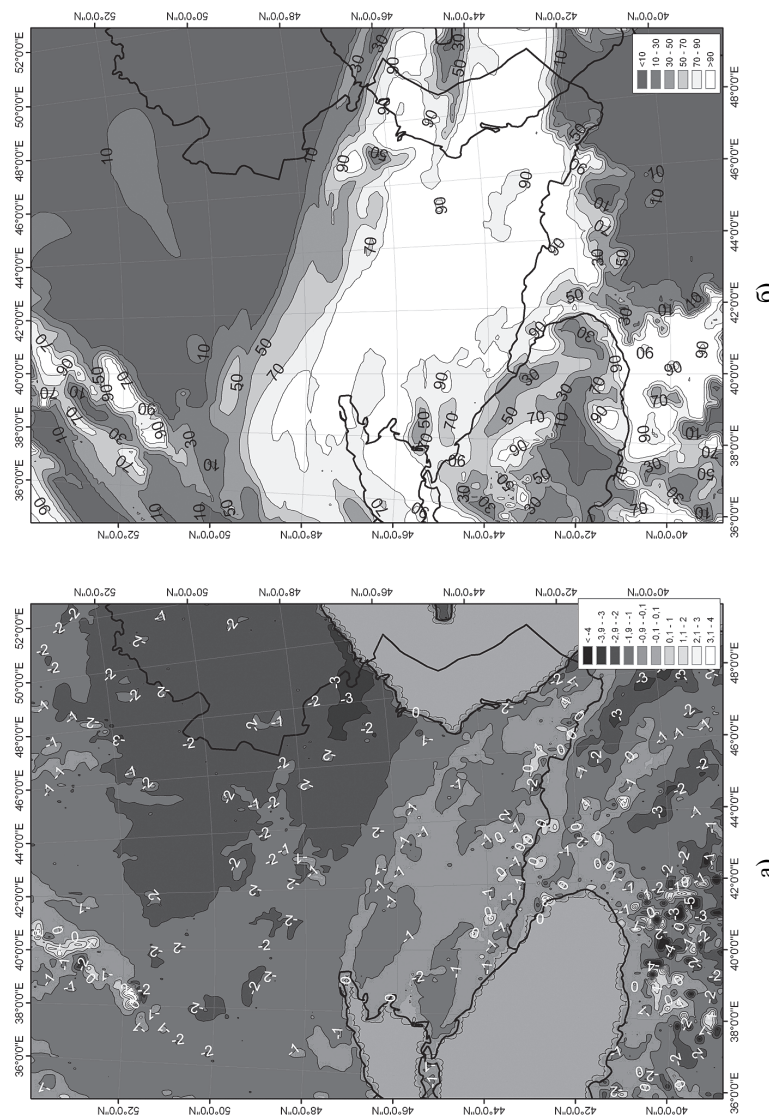


Рис. 3. Разность полей температуры поверхности за счет изменения на 25 % коэффициента турбулентного теплообмена (а) и суммарный облачный покров (б) на 09 ч ВСВ 17.07.2009 года

Для анализа влияния вариаций поглощенной коротковолновой радиации на температуру подстилающей поверхности в рамках модели прогноза погоды с учетом влияния обратных связей физических параметров и эволюции облачности при длительном интегрировании модели были проведены численные эксперименты – контрольный и с увеличением потока солнечной радиации на 30 Вт/м^2 в тех узлах сетки, где имела облачность в процессе интегрирования модели. Результаты представлены на рис. 4, где показана разность полей температуры поверхности, полученных в двух экспериментах.

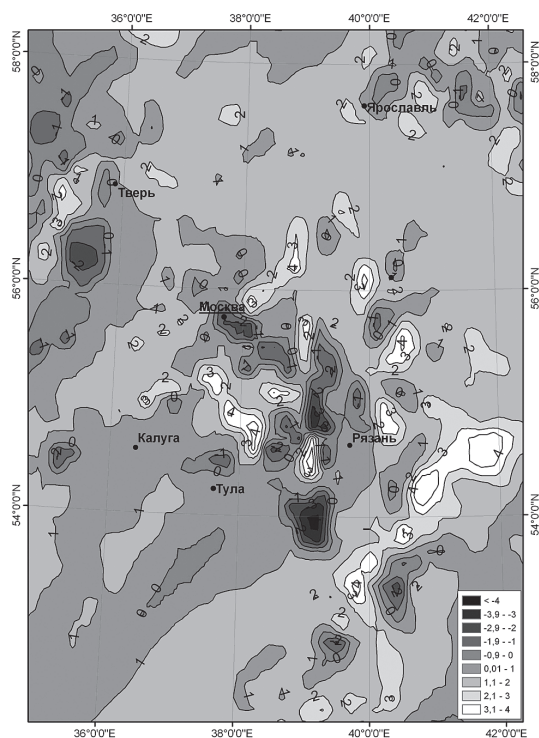


Рис. 4. Разность полей температуры поверхности в связи с увеличением на 30 Вт/м^2 поглощенной коротковолновой радиации для Центрального района России на 09 ч ВСВ 17.07.2009 года

Видно, что увеличение значения поглощенной коротковолновой радиации приводит к изменению температуры поверхности на $1-2 \text{ К}$, а в некоторых местах – до 4 К . Несмотря на определенную незамкнутость проведенного эксперимента, результаты показывают порядок величины возможной реакции температуры поверхности на погрешности расчета компонент теплового баланса. Погрешности такого порядка могут быть и в расчете других компонент баланса, например эффективного излучения или турбулентного потока явного тепла.

4.4. Исследование чувствительности температуры поверхности к вариациям потока коротковолновой радиации, приходящей на подстилающую поверхность, в зимних условиях

В зимнее время года величины потоков солнечной радиации в северной части рассматриваемой области значительно меньше, чем в южной части, поэтому разность температур меньше, чем летом.

На рис. 5а представлена разность полей температуры поверхности при увеличении поглощенной радиации на 30 Вт/м^2 . На рис. 5б представлено поле облачности. Между Черным и Каспийским морями имеется область, занятая облаками. В этом же районе на рис. 2а видны положительные изменения температуры на $0,2 \text{ К}$, южнее – 1 К . Эти величины изменения температуры значительно ниже, чем в летнее время в этом же районе.

Заключение

Проведен анализ результатов численных экспериментов с моделью COSMO-RU для суточного хода интегральной водности облаков, поглощенной коротковолновой радиации и эффективного излучения поверхности в точке поля со 100% облачностью. Показано, что суточный ход поглощенной коротковолновой радиации на поверхности имеет обратную корреляцию с суточным ходом интегральной водности облаков. Вследствие этого суточный ход температуры поверхности имеет обратную корреляцию с суточным ходом интегральной водности облаков. Суточный ход эффективного излучения поверхности также имеет корреляцию с суточным ходом водности облаков. Величина эффективного излучения увеличивается с уменьшением водности.

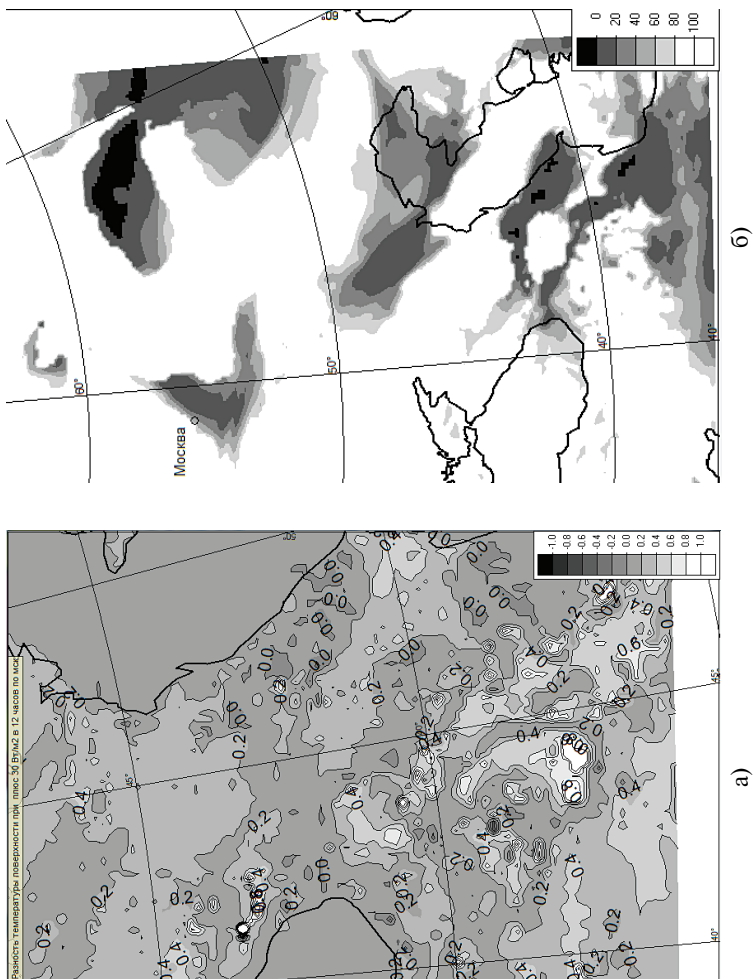


Рис. 5. Разность полей температуры поверхности в связи с увеличением на 30 Вт/м^2 поглощенной коротковолновой радиации для южной части области расчета (а) и суммарный облачный покров для всей области в варианте с измененной поглощенной коротковолновой радиацией (б) в 12 ч ВСВ 11.12.2009 года

Вариация поглощенной коротковолновой радиации на поверхности (увеличение на 30 Вт/м^2) в процессе интегрирования модели на 9 часов приводит к изменению температуры подстилающей поверхности на 2–4 К в июле и порядка 1 К – в декабре, при этом изменения температуры в отдельных точках могут быть отрицательные. Знак изменений температуры зависит от ряда факторов, таких, как наличие облачности, ее эволюции. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

Вариация интегральной водности (увеличение на 25 %) приводит к изменению температуры поверхности на 1–2 К летом. При этом наблюдается обратная корреляция с интегральной водностью облаков.

Вариации коэффициента турбулентного обмена в потоке явного тепла (увеличение на 25 %) приводит к изменению температуры поверхности на 1–3 К летом. Полученные в результате экспериментов вариации температуры подстилающей поверхности позволяют сформулировать требования к точности алгоритмов расчета радиационных потоков в облачной атмосфере, водности облаков и коэффициентов турбулентного теплообмена. Представленные результаты являются оценочными с точки зрения возможной реакции модели на вариации параметров.

В заключение авторы выражают благодарность Г.С. Ривину и Д.В. Блинову за помощь при работе с моделью COSMO-RU, Ю.В. Алферову – за консультации при работе с системой «Изограф».

Работа выполнялась при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям в рамках федеральной целевой программы «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007–2012 годы» по составной части темы «МЕГАПОЛИС – интегрированные технологии оценки загрязнения атмосферы крупных городов в региональном и глобальном масштабах на основе аэрокосмического и наземного мониторинга для уменьшения негативных последствий антропогенных воздействий».

Список литературы

1. Вильфанд Р.М., Ривин Г.С., Розинкина И.А. Мезомасштабный краткосрочный региональный прогноз погоды в Гидрометцентре России на примере COSMO-RU // Метеорология и гидрология. – 2010. – № 1. – С. 5–17.

2. Курбаткин Г.П., Дмитриева-Арраго Л.Р., Филатов С.А. О параметризации облачности в гидродинамических моделях крупномасштабных атмосферных движений // Метеорология и гидрология. — 1988. — №5. — С. 5–18.
3. Шатунова М.В., Дмитриева-Арраго Л.Р. Зависимость потоков солнечного излучения в облачной атмосфере от микрофизических свойств облачности // Труды Гидрометцентра России. — 2010. — Вып. 344. — С. 43–58.
4. Doms G., Shättler U. A Description of the Nonhydrostatic Regional Model LM. Part 1: Dynamics and Numerics. — 2002. — www.cosmo-model.org.
5. Doms G., U.Shättler, C.Schraff. A Description of the Nonhydrostatic Regional COSMO-Model, User's Guide. — 2008. — www.cosmo-model.org.
6. Doms G., E.Heise et al. A Description of the Nonhydrostatic Regional Model LM. Part 2: Physical Parametrization. — 2007. — www.cosmo-model.org.
7. Ritter B., Geleyn J.F. A comprehensive radiation scheme for numerical weather prediction models with potential applications in climate simulations // Mon. Wea. Rev. — 1992. — Vol. 120. — P. 303–325.
8. Smagorinsky J. On the dynamical prediction of large scale condensation by numerical methods // Monograph. 5. Physics of precipitation. — American Geophysical Union, 1960.