*В. И. Цветков, О. В. Снопова*

# Метод расчета вертикальной скорости и диагностические соотношения для дивергенции ветра и притока тепла в атмосфере

При исследовании атмосферных процессов часто приходится сталкиваться с проблемой отсутствия данных о вертикальной скорости, которая не измеряется на метеорологических станциях, однако является важной характеристикой состояния атмосферы. Традиционно, в случае известных полей $u$ и $v$, используется метод расчета вертикальной скорости через уравнение неразрывности. Однако точность этого метода невысока из-за недостаточно высокого качества начальных данных о горизонтальной скорости ветра.

Фридманом А. А. [2] был предложен метод расчета компонент вектора скорости по известным динамическим элементам (давлению, плотности, температуре, их производным по времени и по пространству и различным функциям от этих величин). Остановимся на кратком изложении данного метода.

Фридман рассматривал систему уравнений гидротермодинамики в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{V}}{dt} = -\omega \operatorname{grad} p + \mathbf{F}, \\ \dfrac{d \ln \omega}{dt} = div\mathbf{V}, \\ \dfrac{c_v}{\omega}\dfrac{dT}{dt} + \dfrac{c_p - c_v}{R\omega} p \dfrac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \\ p\omega = RT, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{V}=(u, v, w)$ - вектор скорости,
$t$ - время,
$\omega = \dfrac{1}{\rho}$ - удельный объем,
$p$ - давление,
$\mathbf{F} = \mathbf{F}_т + \mathbf{F}_К$,
$T$ - температура,
$\varepsilon$ - приток тепла,
$c_v$ = 718 Дж(кг$^{-1}$К$^{-1}$) - удельная теплоемкость при постоянном объеме,
$c_p$ = 1005 Дж(кг$^{-1}$К$^{-1}$) - удельная теплоемкость при постоянном давлении,
$R$ = 287 Дж(кг$^{-1}$К$^{-1}$) - универсальная газовая постоянная.

Система (1) является замкнутой, т. к. имеет 6 неизвестных ($\mathbf{V}=(u, v, w)$, $p$, $T$, $\omega$) и 6 уравнений. Данная система описывает состояние, так называемой, свободной атмосферы, т. е. той части атмосферы, где главными силами, вызывающими движение воздуха, являются сила барического градиента $(-\omega \operatorname{grad} p)$, сила тяжести $(\mathbf{F}_т = (0,0,-g))$ и сила Кориолиса $(\mathbf{F}_К = (2\tilde{\omega} w \sin\theta - 2\tilde{\omega} v \cos\theta, 2\tilde{\omega} u \sin\theta, -2\tilde{\omega} u \cos\theta))$. Здесь g – модуль ускорения свободного падения, $\tilde{\omega}$ - модуль угловой скорости вращения Земли. Величина силы трения в свободной атмосфере мала, поэтому член, отвечающий за влияние силы трения на движение воздуха, в уравнении движения отсутствует. Отметим, что все рассуждения, изложенные ниже, применимы только к бароклинной атмосфере, т. е. считается, что вектора $\operatorname{grad} p$ и $\operatorname{grad} \rho$ не параллельны.

Рассматривая систему (1), Фридман ввел понятие динамического градиента:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \frac{d\mathbf{V}}{dt}. \tag{2}$$

Из (1) следует, что

$$\mathbf{G} = \omega \operatorname{grad} p. \tag{3}$$

Т. е. вектор **G** выражается или только через скорость и заданные внешние силы, или только через плотность и давление.

Далее Фридман вводит понятие турбулизирующего вектора:

$\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{G}$.

Из предположения о бароклинности следует, что вектор $\mathbf{H} \neq 0$.

Обозначим $\mathbf{\Phi} = \operatorname{grad}\ln\rho$, тогда

$$\mathbf{H} = [\mathbf{G}, \mathbf{\Phi}]. \quad (4)$$

Из (4) следует, что

$$(\mathbf{H},\mathbf{G})=0, \quad (5)$$

$$(\mathbf{H},\mathbf{\Phi})=0. \quad (6)$$

В трехмерном пространстве, где рассматривается задача, любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам. В частности вектор скорости **V** может быть разложен по трем некомпланарным векторам $\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad}\omega, [\operatorname{grad} p, \operatorname{grad}\omega]\}$, т. е.

$$\mathbf{V} = a\operatorname{grad} p + b\operatorname{grad}\omega + c\mathbf{H}. \quad (7)$$

Введем следующие обозначения:

$$(\mathbf{H},\mathbf{H}) = |\mathbf{H}|^2 = h,$$

$$E(\varphi) = \frac{d\varphi}{dt} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = (\mathbf{V}, \operatorname{grad}\varphi),$$

$$(\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{grad}\psi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} = J(\varphi,\psi),$$

$J(\varphi) = J(\varphi,\varphi)$ и $J = J(p,\omega)$.

Из предположения бароклинности следует, что $h = |\mathbf{H}|^2 \neq 0$. Тогда для нахождения $a$ и $b$ имеем следующие равенства:

$$\begin{cases} a = E(p)\dfrac{J(\omega)}{h} - E(\omega)\dfrac{J}{h}, \\ b = -E(p)\dfrac{J}{h} + E(\omega)\dfrac{J(p)}{h}. \end{cases}$$

Используя стандартное обозначение $\Omega = \operatorname{rot}\mathbf{V}$, введем обозначения: $N = (\mathbf{\Omega},\mathbf{H}), P = (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H})$. Тогда коэффициент $c$ находится по формуле

$$c = \frac{N + J(a,\omega)J(p) - J(b,p)J(\omega) + J\cdot[J(b,\omega) - J(a,p)]}{P}.$$

Явным недостатком предложенного метода расчета компонент скорости через динамические элементы является следующее требование: кроме динамических элементов (давления, плотности, температуры, их производных по времени и по пространству и различных функций от этих величин) считаются заданными дивергенция и ротор скорости. Данное обстоятельство обусловило тот факт, что, несмотря на теоретическую ценность, метод вычисления компонент скорости ветра через динамические элементы, предложенный Фридманом, не получил практического применения.

Однако, на базе метода Фридмана, проводя масштабный анализ уравнений, можно получить явную формулу для расчета вертикальной компоненты вектора скорости, зная горизонтальные компоненты, а также давление и температуру, которые, как сказано в постановке задачи, известны из наблюдений, проводимых на метеорологических станциях.

Введем следующие обозначения:

$\mu = (\mathbf{V},\mathbf{G}), \eta = (\mathbf{V},\mathbf{\Phi})$.

Т. к. **V** можно разложить по трем некомпланарным векторам **G**, **Φ** и **H**:

$$\mathbf{V} = a\mathbf{G} + b\mathbf{\Phi} + c\mathbf{H}, \quad (8)$$

то имеет место следующие соотношения:

$$\begin{cases}\mu = a(\mathbf{G},\mathbf{G}) + b(\mathbf{\Phi},\mathbf{G}),\\ \eta = a(\mathbf{G},\mathbf{\Phi}) + b(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Phi}).\end{cases} \tag{9}$$

Легко видеть, что определитель системы (9) равен $(\mathbf{H},\mathbf{H})$. Следовательно,

$$\begin{cases} a = \dfrac{\mu(\mathbf{\Phi},\mathbf{\Phi}) - \eta(\mathbf{G},\mathbf{\Phi})}{(\mathbf{H},\mathbf{H})},\\ b = \dfrac{\eta(\mathbf{G},\mathbf{G}) - \mu(\mathbf{G},\mathbf{\Phi})}{(\mathbf{H},\mathbf{H})}.\end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, для нахождения коэффициентов *a* и *b* необходимо знать величины $\mu$ и $\eta$.

Из системы (10) следуют тождества:

$$\begin{cases} aG_x + b\Phi_x = \dfrac{\eta G_z - \mu \Phi_z}{(\mathbf{H},\mathbf{H})} H_y - \dfrac{\mu \Phi_y + \eta G_y}{(\mathbf{H},\mathbf{H})} H_z,\\ aG_y + b\Phi_y = -\dfrac{\eta G_z - \mu \Phi_z}{(\mathbf{H},\mathbf{H})} H_x + \dfrac{\eta G_x - \mu \Phi_x}{(\mathbf{H},\mathbf{H})} H_z,\\ aG_z + b\Phi_z = \dfrac{\mu\left(H_x^2 + H_y^2\right)}{G_z(\mathbf{H},\mathbf{H})} + \dfrac{\mu\left(G_x\Phi_z H_y - H_x G_y \Phi_z\right) + \eta\left(G_y H_x - G_x H_y\right)G_z}{G_z(\mathbf{H},\mathbf{H})}.\end{cases} \tag{11}$$

Систему (11) можно свести к более простому виду, если применить масштабный анализ.

Воспользуемся данными о характерных масштабах метеовеличин, приведенными в работе Кибеля [1]:

- характерная высота $H \sim 10^4$ *м*;
- характерное горизонтальное расстояние $L \sim 10^6$ *м*;
- характерная горизонтальная скорость $U \sim 10$ *м/с*;
- характерная вертикальная скорость $W = \dfrac{H}{L}U \sim 10^{-1}\, м/с$;
- характерное значение параметра Кориолиса $l \sim l_1 \sim 10^{-4}\, c^{-1}$;
- характерное время $\tau \sim 10^5\, c$;
- характерная плотность $\tilde{\rho} \sim 10^0$ *кг/м*$^3$.

Результаты масштабного анализа компонент векторов **G**, **Ф**, **H** приведены в табл. 1.

Заметим, что слагаемые правой части первого уравнения системы (11) отличаются друг от друга на 8 порядков. В измерениях, проводимых на метеостанциях, всегда присутствует погрешность измерений, поэтому при вычислении первого слагаемого правой части суммарная погрешность будет превышать по порядку величины второе слагаемое правой части. Этот факт дает нам основание пренебречь вторым слагаемым правой части. То же самое можно сказать и о втором уравнении системы. Что касается скалярного произведения $(\mathbf{H},\mathbf{H}) = H_x^2 + H_y^2 + H_z^2$, то $H_x^2 \sim H_y^2$ на 8 порядков превосходят величину $H_z^2$, поэтому опять же можно считать, что $(\mathbf{H},\mathbf{H}) \approx H_x^2 + H_y^2$. Учитывая вышесказанное, система (11) примет вид

$$\begin{cases} aG_x + b\Phi_x = \dfrac{\eta G_z - \mu \Phi_z}{H_x^2 + H_y^2} H_y,\\ aG_y + b\Phi_y = -\dfrac{\eta G_z - \mu \Phi_z}{H_x^2 + H_y^2} H_x,\\ aG_z + b\Phi_z = \dfrac{\mu}{G_z} + \dfrac{\left(G_x H_y - H_x G_y\right)}{G_z} \cdot \dfrac{\mu \Phi_z - \eta G_z}{H_x^2 + H_y^2}.\end{cases} \tag{12}$$

Обозначив $\alpha = \dfrac{\mu \Phi_z - \eta G_z}{H_x^2 + H_y^2}$, получаем

$$\begin{cases} aG_x + b\Phi_x = -\alpha H_y, \\ aG_y + b\Phi_y = \alpha H_x, \\ aG_z + b\Phi_z = \dfrac{\mu}{G_z} + \dfrac{\left(G_x H_y - H_x G_y\right)}{G_z}\alpha. \end{cases} \tag{13}$$

Результаты масштабного анализа для величин *a*, *b*, *c*, $\mu$, $\eta$ и $\alpha$ приведены в табл. 2.

Масштабный анализ позволяет оценить каждое слагаемое этого уравнения:

$aG_z \sim b\Phi_z \sim 10^5$; $\dfrac{\mu}{G_z} \sim \dfrac{\left(G_x H_y - H_x G_y\right)}{G_z}\alpha \sim 10^{-3}$.

Опять-таки из-за погрешности измерений равенство в последнем уравнении системы (13) не может быть выполнено точно, т. к. для выполнения строгого равенства слагаемые левой части уравнения должны совпадать друг с другом с точностью до 8-й значащей цифры. Поскольку точное равенство в силу объективных причин невозможно, предлагается ввести следующую гипотезу:

$$aG_z + b\Phi_z = 0 \text{ и } \frac{\mu}{G_z} + \frac{\left(G_x H_y - H_x G_y\right)}{G_z}\alpha = 0, \tag{14}$$

т. е. получили дополнительное условие для $\mu$ и $\eta$.

Отметим, что проведенный масштабный анализ позволяет определить значение $\alpha$. Действительно, на основании вышеизложенного предположения о том, что в уравнениях слагаемыми, которые на 8 порядков меньше остальных, можно пренебречь, вектор **V** может быть представлен в виде

$\mathbf{V} = c\mathbf{H} + \alpha \mathbf{H}_1$, где $\mathbf{H}_1 = -H_y \mathbf{i} + H_x \mathbf{j}$.

Откуда следует, что

$\alpha \approx \dfrac{-uH_y + vH_x}{H_x^2 + H_y^2}$, $c \approx \dfrac{vH_y + uH_x}{H_x^2 + H_y^2}$.

Следовательно, вертикальная скорость может быть вычислена по формуле

$w \approx \dfrac{uH_x + vH_y}{H_x^2 + H_y^2} H_z$.

Отметим, что проведенный масштабный анализ позволяет получить уточненное характерное значение вертикальной компоненты вектора скорости, которое оказалось $\sim 10^{-3}$ м/с.

Кроме вертикальной скорости данный метод позволяет вычислить дивергенцию скорости (divV), которая является одной из переменных атмосферной модели Гидрометцентра России. Рассмотрим уравнение неразрывности в виде $\dfrac{d \ln \frac{1}{\rho}}{dt} = \mathrm{div}\mathbf{V}$. Следовательно, используя введенные ранее обозначения, получаем

$\mathrm{div}\mathbf{V} = -\dfrac{\partial \ln \rho}{\partial t} - \eta$,

$\eta$ можно найти следующим образом:

$\alpha = \dfrac{\mu \Phi_z - \eta G_z}{H_x^2 + H_y^2}$, где $\alpha$ - известно.

Второе уравнение, связывающее переменные $\mu$ и $\eta$, получаем, воспользовавшись гипотезой (14).

Таким образом, для двух неизвестных $\mu$ и $\eta$ у нас есть два уравнения:

$$\begin{cases} \mu + \left(G_x H_y - H_x G_y\right)\alpha = 0, \\ \dfrac{\mu \Phi_z - \eta G_z}{H_x^2 + H_y^2} = \alpha. \end{cases} \tag{15}$$

Откуда

$$\begin{cases} \mu = a\left(H_x G_y - G_x H_y\right), \\ \eta = a\left(H_x \Phi_y - \Phi_x H_y\right). \end{cases}$$

Из изложенной выше методики следует также диагностическое соотношение для притока тепла в атмосфере. Введя обозначение $\xi = \left(\mathbf{V}, \operatorname{grad} T\right)$, рассмотрим уравнение притока тепла из системы (1) в виде:

$$\varepsilon = c_v \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \xi \right) + \frac{c_p - c_v}{R} p\rho \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} + \eta \right).$$

Для нахождения $\xi$ воспользуемся уравнением состояния, записанным в векторной форме:

$$\operatorname{grad} p = R\rho \operatorname{grad} T + RT \operatorname{grad} \rho \tag{16}$$

Умножив скалярно (16) на вектор **V**, с учетом принятых ранее обозначений получим:

$$\mu = R\xi + RT\eta,$$

откуда $\xi = \dfrac{\mu - RT\eta}{R}$.

Итак, все величины, необходимые для вычисления вертикальной скорости, дивергенции скорости и притока тепла известны.

Работа поддержана грантами РФФИ 00-05-64803, 01-05-65493, 01-05-65400.

## Список литературы

1. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды // Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва – 1957 – 376 с.
2. Фридман А. А. Опыт гидромеханики сжимаемой жидкости // ОНТИ Государственное технико-теоретическое издательство – Ленинград – Москва – 1934 – 370с.