М.Д. Цырульников

Оценка относительного влияния ошибок объективного анализа полей геопотенцала, температуры и ветра на краткосрочный прогноз

Как известно, ошибки численного прогноза погоды обусловлены двумя факторами: ошибками начальных полей прогностической схемы - полей объективного анализа (ОА) и несовершенством прогностической модели. В краткосрочном прогнозе (24-48 ч) ошибки ОА оказываются по их влиянию соизмеримы с ошибками модели, а в сверхкраткосрочном прогнозе (6-12 ч, важном, в частности, в задаче четырехмерного усвоения данных) ошибки ОА превалируют по их влиянию на успешность прогноза. Поэтому исследование такого влияния представляет значительный интерес, особенно при разработке схем ОА и усвоения данных. Существенно знать, какие метеорологические поля, используемые в качестве начальных данных при численном прогнозе, оказывают наибольшее влияние на его успешность; какие характеристики этих наиболее важных полей следует уточнять при ОА в первую очередь.

Некоторые аспекты данной проблемы изучены теоретически и/или экспериментально. Так, в работе [26] экспериментально выявлено, что ошибки в приземных полях температуры, ветра, давления, а также в тропосферном поле влажности (во внетропических широтах), оказывают слабое влияние на прогноз. Вне тропиков наиболее существенны ошибки в полях, определяющих динамику: в высотных полях ветра и массы (геопотенциал, температура). Вопрос о том, что в большей степени лимитирует успешность прогноза: ошибки ОА ветра или геопотенциала, изучался для баротропной модели (см. [13] и ссылки там). Но результаты, полученные в этих работах и основанные на теории геострофического приспособления, имеют характер условных утверждений: если поля ошибок ОА крупномасштабны по вертикали и мелкомасштабны по горизонтали, то существенны ошибки ОА ветра и т.д. Остаются вопросы о том, какова ситуация для реальных ошибок существующих в настоящее время схем ОА, и что будет в *бароклинном* случае? В настоящей работе предлагается подход к решению бароклинной задачи, основанный на привлечении понятия энергии "медленной" компоненты в полях ошибок ОА.

Мы ограничились исследованием значимости ошибок метеополей, наиболее существенных для прогноза в средних широтах: ветра, геопотенциала и температуры для численного краткосрочного прогноза погоды синоптического и подсиноптического масштаба.. В силу гидростатичности атмосферных процессов синоптического масштаба и, частично, мезо-масштаба, поля геопотенциала и температуры (совместно с приземным давлением) описывают, каждое, распределение массы атмосферного воздуха в пространстве. Поэтому эти поля иногда называют "полем массы". Таким образом, нас интересует чувствительность прогноза к ошибкам начальных полей ветра и массы.

Мы применяем подход, предложенный в [13] для баротропной задачи. Его смысл состоит в следующем. Как известно, для баротропного краткосрочного прогноза атмосферных движений синоптического масштаба существенна точность представления в полях ОА медленных волн (волн Россби), тогда как влияние быстрых (гравитационных) волн несущественно. С другой стороны, поле медленных волн с высокой степенью точности описывается полем линеаризованного потенциального вихря (ЛПВ). Поэтому, для оценки влияния ошибок ОА полей ветра и геопотенциала (поле температуры не рассматривается в баротропной задаче) предлагается вычислить вклад этих ошибок в ошибку ЛПВ. Вопрос о том, что следует понимать под "ошибкой ЛПВ" решается путем привлечения понятия энергии "медленной" компоненты полей ошибок ОА («медленной энергии»). Если предположить, что именно эта величина определяет энергию той составляющей ошибки прогноза, которая обязана своим происхождением ошибкам ОА, то мы получим физически обоснованную меру ошибки ЛПВ. Оказывается, что медленная энергия пропорциональна среднему квадрату трансформированного (определённым образом сглаженного - подробнее см. [13]) ЛПВ.

Таким образом, мы получаем величину (трансформированный ЛПВ), среднеквадратичная погрешность которой определяет, в первом приближении, среднеквадратичную погрешность численного прогноза. Следовательно, влияние ошибок ОА геопотенциала и ветра на прогноз можно приближённо оценить, вычислив их вклад в величину трансформированного ЛПВ. В данной статье мы развиваем этот подход применительно к бароклинной задаче.

1. Потенциальный вихрь и ошибки полей ОА

Аналогично баротропной задаче [13], рассмотрим *бароклинный ЛПВ*. Покажем, что ЛПВ определяется главным образом *волнами Россби* и слабо зависит от *гравитационых волн*. Обсудим, как зависят ошибки краткосрочного прогноза от ошибок восстановления при ОА *быстрых и медленных волн.* Выясним отличие бароклинной задачи от баротропной, обусловленное наличием *бароклинных медленных гравитационных волн.*

1.1. Бароклинный ЛПВ. Для его получения запишем линеаризованные относительно состояния покоя уравнения бароклинной гидростатической адиабатической атмосферы на l-плоскости в форме [20]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + lv \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} - lu, \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}[\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial \Phi}{\partial p}] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \tag{3}$$

где

$$c_0^2(p) = -RT_0 p\frac{d\ln\theta_0}{dp},$$

индекс «ноль» означает средний профиль, относительно которого производится линеаризация. Соответствующие линеаризованные граничные условия по вертикали примем следующие: непротекание на нижней границе (горизонтальной):

$$\frac{\partial}{\partial t}[\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{c_0^2}{RT_o p}\Phi(p)] = 0 \quad \text{при } p = p_s \tag{4}$$

и отсутствие потока массы на верхней границе:

$$\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \Phi}{\partial p} \to 0 \qquad \text{при } p \to 0\,. \tag{5}$$

Из (1) – (3) следует, что

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

где

$$\Pi = \frac{\varsigma}{l} + \frac{\partial}{\partial p}[\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial \Phi}{\partial p}] \tag{7}$$

есть искомый ЛПВ, совпадающий с квазигеострофическим псевдопотенциальным вихрем [15; 8].

1.2. ЛПВ и гравитационные волны. Покажем, что, так же как и для баротропного приближения, в бароклинной задаче на l-плоскости *гравитационные волны дают нулевой* Π. Для этого воспользуемся разложением по вертикальным нормальным модам системы (1)-(5), совпадающим с собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля для вертикального оператора в выражении (3) [4, 20]:

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}\right)G_q(p) = \lambda_q G_q(p). \qquad (8)$$

Граничные условия задачи Штурма-Лиувилля получаем из (4), (5), опуская частную производную по времени, т.к. интересующие нас здесь гравитационные волны (ГВ) имеют ненулевые частоты:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{c^2}{RT_0 p}\Phi(p) \quad \text{при} \quad p = p_s, \qquad (9)$$

$$\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0 \quad \text{при} \quad p = 0. \qquad (10)$$

Эти граничные условия (9), (10) мы будем считать выполненными и для волн Россби. Формально волны Россби стационарны на l-плоскости, исходные граничные условия (4), (5) выполняются для них автоматически, следовательно, из (4), (5) не следует (9), (10). Однако если мы введем сколь угодно малый β-эффект или рассмотрим модель на сферической Земле, то волны Россби потеряют свойство стационарности [4, 11] и граничные условия (9), (10) будут иметь силу, поэтому мы ими воспользуемся.

Предположим, что для рассматриваемой задачи Штурма-Лиувилля выполнены условия дискретности спектра собственных чисел λ_q (например, стратификация такова, что атмосфера ограничена по высоте [16]). Такое предположение допустимо, т.к. упомянутые условия зависят от поведения функции $c_0(p)$ при $p \to 0$, которое находится вне рамок нашего анализа. В случае дискретного спектра собственные функции $G_q(p)$ (вертикальные нормальные моды) образуют ортогональный базис в пространстве $L^2(0, p_s)$, при этом $\lambda_q < 0$ [16, 4].Поэтому мы можем разложить u, v, Φ, как функции от p, по системе функций $\{G_q(p)\}$ и, тем самым, свести бароклинную задачу (1)-(3) к ряду баротропных с эквивалентными глубинами $\overline{\Phi}_q = -1/\lambda_q$ [3]. Соответственно мы получаем

$$\Pi(x, y, p, t) = \sum \Pi_q(x, y, t) G_q(p), \qquad (11)$$

где, согласно (7),

$$\Pi_q(x, y, t) = \frac{\zeta_q(x, y, t)}{l} - \frac{\Phi_q(x, y, t)}{\overline{\Phi}_q}, \qquad (12)$$

что совпадает с баротропным ЛПВ для эквивалентной глубины $\overline{\Phi}_q$ [13]. Следовательно, т.к. для баротропной модели ГВ дают нулевой Π_q [28, 13], то, согласно (11), и в бароклинной задаче на l-плоскости поле $\Pi(x, y, p)$ по-прежнему определяется исключительно волнами Россби.

Аналогично [13], можно показать, что полученный вывод полностью сохраняет силу и при линеаризации относительно постоянного зонального потока $\bar{u} = const$. Учет же β-эффекта или сдвига основного зонального потока, которые могут рассматриваться как малые регулярные возмущения исходных примитивных уравнений, приводит лишь к некоторому ослаблению вывода об однозначной связи поля ЛПВ и поля волн Россби. Поэтому, как и в баротропной задаче, влиянием ГВ на ЛПВ мы можем пренебречь.

1.3. Влияние на прогноз. Как показано выше, поле волн Россби в бароклинной задаче, как и в баротропной, достаточно точно описывается полем ЛПВ. С другой стороны, ошибки при численном прогнозе определяются, главным образом, ошибками восстановления именно волн Россби, а точнее, *медленных волн* в полях ОА. Это следует из практики применения нелинейной инициализации по нормальным модам, показывающей, что качество прогноза с заблаговременностью сутки и более слабо зависит от наличия или особенностей процедуры инициализации [6, 17, 34]. Но любая схема инициализации радикально меняет амплитуды ГВ (в значительной мере, случайные в полях ОА). Так, классическая схема Махенауэра [24] (реализованная, например, в [34] для анализируемой нами бароклинной задачи) полностью игнорирует значения амплитуд быстрых ГВ, полученных по полям ОА. Эти амплитуды восстанавливаются по амплитудам медленных волн Россби, которые, таким образом, определяют качество последующего прогноза, практически независимо от поля быстрых волн. Более тщательный анализ влияния быстрых волн в начальных полях численного прогноза на его результаты показывает, что быстрые волны в краткосрочном прогнозе практически не взаимодействуют с медленными [34]. Таким образом, прогноз метеорологически значимых медленных движений определяется в первом приближении только полем медленных волн в полях ОА.

В баротропной задаче медленными волнами являются волны Россби и только они. В бароклинной же задаче волны Россби остаются медленными, но появляются *медленные*, а значит, метеорологически значимые (см. ниже п.4) *гравитационные волны*, отвечающие малым эквивалентным глубинам $\overline{\Phi}_q$. Это несколько ограничивает применимость «принципа обратимости» потенциального вихря [19], которым мы фактически пользовались в баротропной задаче [13] и который означает, что поле потенциального вихря содержит *всю информацию*, необходимую для прогноза. Действительно, в бароклинной задаче ЛПВ *не содержит* информации о медленных метеорологически значимых ГВ, т.к. последние дают нулевой вклад в ЛПВ. Неполная адекватность «принципа обратимости», в частности, определила, по-видимому, и относительную неудачу попытки обобщения баротропных «медленных уравнений» [22] на бароклинную прогностическую модель [23]. Учтем, что нашей целью в данной работе является не прогноз, а оценка вклада ошибок ОА полей массы и ветра в ошибку краткосрочного численного прогноза. Поэтому в первом приближении мы пренебрежем упомянутыми медленными ГВ ввиду их относительно небольшой совокупной энергии, а затем учтем их как малую поправку (см. ниже п. 3), т.е., как и в баротропной задаче [13], будем считать, что основная часть информации, определяющей точность краткосрочного прогноза, содержится в поле волн Россби, а значит, как показано выше, в поле ЛПВ.

2. Трансформированный ЛПВ

Для выбора физически обоснованной нормы, в которой следует оценивать ошибки ЛПВ с точки зрения их влияния на прогноз, рассмотрим, следуя [13], *энергию Россби-компонент* полей ошибок ОА. Полагая, что в первом приближении именно эта энергия определяет величину ошибки прогноза (см. выше), выразим ее через бароклинный ЛПВ.

Бароклинная энергия возмущения, отнесенная к единице массы атмосферного воздуха, может быть получена из (1)-(5) в следующем виде [2]:

$$E' = \frac{1}{2Mg}\iiint[\vec{v}'^2 + (\frac{R}{c_0}T')^2]dpds + \frac{1}{2Mg}\iint \frac{p}{RT_0}\Phi'^2\, ds, \qquad (13)$$

где М – масса атмосферы, Φ' - возмущение геопотенциала на изобарической поверхности, близкой к поверхности Земли (по которой ведется интегрирование во втором члене (13), например, 1000 гПа). Формула (13) получена для отклонений от основного состояния покоя, но мы будем ею пользоваться в дальнейшем и для оценки энергии полей ошибок ОА, обозначаемых здесь и далее штрихами.

Для геострофической и гидростатической волны Россби на l-плоскости имеем, согласно (13):

$$E'_R = \frac{1}{2Mg}\iiint[(\frac{\nabla\Phi'_R}{l})^2 + (\frac{p}{c_0}\frac{\partial\Phi'_R}{\partial p})^2]dpds + \frac{1}{2Mg}\iint\frac{p}{RT_0}\Phi'^2_R ds, \qquad (14)$$

где ∇ - горизонтальный градиент. Применяя формулу Грина для преобразования члена с $\nabla\Phi'_R$ в (14) (например, в дважды периодической по горизонтали области), интегрируя член с $\partial\Phi'_R/\partial p$ по частям по вертикали, и пользуясь граничными условиями (9), (10), получаем:

$$E'_R = -\frac{1}{2}(\Phi'_R, \Pi'_R). \qquad (15)$$

Здесь (φ,ψ) означает скалярное произведение, где φ,ψ - произвольные интегрируемые с квадратом функции:

$$(\varphi,\psi) = \frac{1}{Mg}\iiint\varphi\psi dsdp. \qquad (16)$$

Далее, аналогично [13], вводим оператор

$$A = -\frac{\Delta}{l^2} - \frac{\partial}{\partial p}(\frac{p^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial p}), \qquad (17)$$

(Δ - горизонтальный лапласиан), так что для волн Россби

$$\Pi'_R = -A\Phi'_R. \qquad (18)$$

Можно доказать, что в гильбертовом пространстве дважды дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям (9), (10), со скалярным произведением (16), оператор А - самосопряженный, положительный и обратимый. Поэтому, как и в [13], мы можем ввести в рассмотрение неотрицательный *квадратный корень* из A^{-1} : $A^{-1/2}$. Преобразовываем (15), пользуясь этим оператором, и получаем, полностью аналогично [13]:

$$E'_R = \frac{1}{2}\|\tilde{\Pi}\|^2, \qquad (19)$$

где $\|\tilde{\Pi}\|^2 = (\tilde{\Pi},\tilde{\Pi})$,

$$\tilde{\Pi} = A^{-1/2}\Pi'_R \approx A^{-1/2}\Pi' \qquad (20)$$

и учтено, что, как указывалось, $\Pi'_R \approx \Pi'$.

Итак, в пренебрежении медленными ГВ, энергия «медленной» компоненты ошибок ОА определяется среднеквадратичным значением ошибки восстановления по полям ОА *трансформированного* ЛПВ $\tilde{\Pi}$ (20). Поэтому будем оценивать влияние ошибок ОА полей ветра и массы на прогноз путем вычисления их вклада в среднеквадратичную ошибку $\tilde{\Pi}$. При этом приближенно учтем и роль медленных ГВ.

3. Оценка вклада

3.1. Ошибки ОА ветра. Для определения влияния ошибок ОА ветра $\vec{v}'$ на ошибки численного краткосрочного прогноза разложим поле $\vec{v}'$ по вертикальным нормальным модам $G_q(p)$, см. (8),(11):

$$\vec{v}'(x,y,p) = \sum_q \vec{v}'_q(x,y)G_q(p). \qquad (21)$$

Рассмотрим компоненты $\vec{v}_q{}'$, отвечающие *глубоким* модам, т.е. таким модам, для которых эквивалентная глубина $\overline{\Phi}_q / g$ велика в следующем смысле: соответствующий радиус деформации $L_R^{(q)} = \overline{\Phi}_q^{1/2} / l$ значительно превосходит горизонтальный масштаб возмущения (ошибки ОА) L. Для таких мод, как это следует из классической теории геострофического приспособления [10, 14], медленная Россби-компонента практически совпадает с соленоидальной составляющей $\vec{v}_\psi'$ исходного возмущения ветра. Таким образом, для глубоких мод энергия (отнесенная к единице массы) медленной компоненты возмущения определяется как $E_{slow}' \approx E_\psi' \equiv \sigma^2_{\vec{v}_\psi'} / 2$.

Проанализируем, далее, мелкие моды: $L >> L_R^{(q)}$. Для этих мод энергия возмущения ветра сосредоточена, в основном, в гравитационной компоненте [10, 14]. Но гравитационные волны, соответствующие малым эквивалентным глубинам $\overline{\Phi}_q$, являются, как отмечалось выше, *медленными*, а значит, метеорологически значимыми (экспериментальное обоснование значимости для прогноза медленных ГВ приведено ниже в п. 4). Как следствие, любое возмущение, состоящее из мелких мод, является медленным. Поэтому для этой части спектра $E_{slow}' \approx \sigma^2_{\vec{v}'} / 2 = E_\psi' + E_\chi' \equiv \sigma^2_{\vec{v}_\psi'} / 2 + \sigma^2_{\vec{v}_\chi'} / 2$.

Итак, для глубоких мод $E_{slow}' \approx E_\psi'$, для мелких мод $E_{slow}' \approx E_\psi' + E_\chi'$. Покажем, что «в среднем» для всего вертикального спектра мы можем, как и для глубоких мод, пренебречь вкладом потенциальной компоненты. Для этого заметим, что для реальных ошибок ОА ветра соленоидальная компонента преобладает. Так, (см. рис. 11 в [18]) для ошибок 6-часового прогноза число Россби, определенное как $\sigma_{\vec{v}_\chi'} / \sigma_{\vec{v}'}$, равно примерно 0,4. Полагая здесь и далее, что статистика ошибок ОА близка к статистике ошибок краткосрочного прогноза, используемого как первое приближение при ОА, получаем $\sigma_{\vec{v}_\chi'} \approx \sigma_{\vec{v}_\psi'} / 2$, откуда $E_\chi' \approx E_\psi' / 4$. Относительная малость E_χ' дает нам право рассматривать вклад E_χ' в E_{slow}' как малую добавку к вкладу E_ψ'. Эта добавка, как указывалось, имеет примерно нулевой вес в крупномасштабной по вертикали части спектра и примерно единичный вес в мелкомасштабной части спектра. Так как рассматриваемая добавка является малой, мы не внесем существенной погрешности в наш анализ, если оценим ее грубо. А именно, будем считать, что в среднем по всему спектру она имеет вес примерно 1/2: $E_{slow}' \approx E_\psi' + \frac{1}{2} E_\chi'$. Но, как отмечалось выше в данном абзаце, $E_\chi' \approx E_\psi' / 4$. Следовательно, вклад потенциальной компоненты поля ошибок ОА ветра в E_{slow}' составляет приблизительно 1/8, а вклад в $\sqrt{E_{slow}'}$ (именно по этой величине мы оцениваем влияние ошибок ОА на прогноз, см. [13], а также ниже) – около 5%, что находится за пределами точности нашего анализа. Таким образом, *энергия «медленной» компоненты* поля реалистичных ошибок ОА ветра, имеющего структуру, близкую к реально наблюдаемой, определяется как

$$E'_{slow}(\vec{v}') \approx \sigma^2_{\vec{v}'_\psi}/2. \tag{22}$$

3.2. Ошибки ОА температуры. Иная ситуация с «медленной» компонентой энергии возмущения температуры T'. Здесь, наоборот, глубокие моды проектируются преимущественно на подпространство гравитационных волн [10, 14], а мелкие – на подпространство волн Россби. Поэтому энергия ГВ будет складываться из энергии преимущественно глубоких волн, отвечающих большим значениям $\overline{\Phi}_q$, т.е. являющихся *быстрыми*, а значит, метеорологически незначимыми. Следовательно, при анализе роли возмущения (ошибки ОА) температуры мы можем пренебречь энергией ГВ и исходить из того, что искомая энергия *«медленной» компоненты* $E'_{slow}(T')$ близка к *энергии Россби-компоненты* E'_R. А последнюю мы можем определить с помощью введенного выше понятия трансформированного ЛПВ, согласно (19), как $\|\tilde{\Pi}\|^2/2 = \sigma^2_{\tilde{\Pi}}/2$. Приравнивая $\sigma_{\tilde{\Pi}}$ и $\|\tilde{\Pi}\|$, мы пользуемся свойством *эргодичности* случайных полей ошибок ОА, которое позволяет заменять *вероятностное* осреднение ($\sigma_{\tilde{\Pi}}$) на *пространственное* осреднение ($\|\tilde{\Pi}\|$). Это свойство мы можем считать выполненным вследствие малости радиусов корреляции рассматриваемых случайных полей по сравнению с размерами области осреднения [9].

Итак, оценка $E'_{slow}(T')$ может быть получена путем вычисления вклада T' в *среднеквадратичное* значение величины трансформированного ЛПВ $\tilde{\Pi}$. Для этого найдем сначала вклад Π'_T ошибки T' в ЛПВ Π'. В силу (7), полагая параметр вертикальной устойчивости $c_0 = RTN/g$ (N – частота плавучести – см. [11]) постоянным в тропосфере, где сосредоточена основная часть атмосферного воздуха, получаем:

$$\Pi'_T = -\frac{R}{c_0^2}\frac{\partial T'}{\partial \ln p} - \frac{R}{c_0^2}T'. \tag{23}$$

Далее, для перехода от Π' к $\tilde{\Pi}$, рассмотрим оператор A (17), записанный в $\ln p$ –системе координат:

$$A = -\frac{\Delta}{l^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial(\ln p)^2.} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial \ln p}. \tag{24}$$

Заметим, что если мы обладаем полной информацией о ковариационной, а значит и спектральной, структуре поля T', то мы можем точно вычислить дисперсию искомого вклада возмущения T' в трансформированный ЛПВ $\tilde{\Pi}_T = A^{-1/2}\Pi'_T$ путем интегрирования соответствующей спектральной плотности по трехмерному спектру. Реально же мы такой точной информации не имеем. Поэтому будем решать задачу вычисления $D\tilde{\Pi}_T$ приближенно. Для этого, как и ранее, воспользуемся данными о ковариационной структуре полей ошибок краткосрочного прогноза, используемого как первое приближение ОА. Так, согласно [21], вертикальный радиус корреляции (микромасштаб) поля ошибок ОА температуры оценивается как 0,25 в единицах $\ln p$. Такая величина вертикального микромасштаба означает, как легко видеть, возможность пренебречь последними членами в выражениях (23), (24), примерно вчетверо меньшими других членов. Поступая так и переходя в (23), (24) к новой вертикальной координате

$$\eta = \frac{c_0}{l}\ln p, \tag{25}$$

получим

$$A \approx -\frac{\Delta_3}{l^2}, \qquad (26)$$

и

$$\widetilde{\Pi}_T = A^{-1/2}\Pi_T^{'} \approx -\frac{R}{c_0}(-\Delta_3)^{-1/2}\frac{\partial T^{'}}{\partial \eta}, \qquad (27)$$

где Δ_3 - лапласиан в трехмерном пространстве векторов (x, y, η).

Будем искать среднеквадратичное значение поля $\widetilde{\Pi}_T$, полагая $T^{'}(\vec{x})$ однородным случайным полем. Учитывая, что у анализируемых нами возмущений горизонтальный и вертикальный радиусы корреляции малы по сравнению с соответствующими размерами трехмерной области, пренебрежем здесь влиянием границ и рассмотрим задачу в трехмерном евклидовом пространстве R^3. Воспользуемся разложением $T^{'}$ по спектру волновых векторов $\vec{k} = (k_x, k_y, k_\eta)$ [9]

$$T^{'}(\vec{x}) = \int_{R^3} e^{i\vec{k}\vec{x}} Z_{T^{'}}(d\vec{k}). \qquad (28)$$

Подставляя (28) в (27), получаем

$$\widetilde{\Pi}_T(\vec{x}) = -\frac{R}{c_0}\int_{R^3} i\frac{k_\eta}{k} Z_{T^{'}}(d\vec{k}), \qquad (29)$$

где $k = \left|\vec{k}\right|$. Здесь мы использовали то, что применение оператора $(-\Delta_3)^{-1/2}$ к гармонике $\exp(i\vec{k}\vec{x})$ есть, очевидно, ее деление на $\left|\vec{k}\right|$. Из выражения (29) следует, что спектральная плотность поля $\widetilde{\Pi}_T$ будет иметь вид

$$f_{\widetilde{\Pi}_T}(\vec{k}) = \left(\frac{R}{c_0}\frac{k_\eta}{k}\right)^2 f_{T^{'}}(\vec{k}), \qquad (30)$$

где $f_{T^{'}}$ - спектральная плотность поля $T^{'}$. Интегрируя $f_{\widetilde{\Pi}_T}(\vec{k})$ в R^3, мы получим дисперсию $D\widetilde{\Pi}_T = \sigma^2_{\widetilde{\Pi}_T}$. Рассмотрим два случая.

3.2.1. *Монохроматическое возмущение* (спектральная плотность $f_{T^{'}}(\vec{k})$ пропорциональна δ-функции). Очевидно, из уравнения (30) следует, что

$$\sigma_{\widetilde{\Pi}_T} = \frac{R}{c_0}\frac{k_\eta}{k}\sigma_{T^{'}}. \qquad (31)$$

Введём обозначения для горизонтального одномерного масштаба (по каждой из горизонтальных осей координат) $L_1 = 1/k_x = 1/k_y = \sqrt{2}/k$ и горизонтального двумерного масштаба $L = 1/\sqrt{k_x^2 + k_y^2} = L_1/\sqrt{2}$. Заметим, что соответствующие характеристики для однородного изотропного случайного поля $\xi(x, y)$ определяются из выражений $L_1^2 = D\xi / D(\partial\xi/\partial x)$ и $L^2 = D\xi / D(\nabla\xi)$, соответственно. Обозначим, далее, вертикальный одномерный масштаб в $\ln p$-системе координат как $H = 1/(c_0 k_\eta)$. Тогда, из (19), (31) получаем:

$$\sqrt{E'_{slow}(T')} \approx \sqrt{E'_R} = \frac{\sigma_{\tilde{\Pi}_T}}{\sqrt{2}} = \frac{R}{c_0\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{c_0}{l}\cdot\frac{H}{L})^2}} \sigma_{T'}. \tag{32}$$

Отметим зависимость величины $\sqrt{E'_{slow}(T')}$, определяющей *интенсивность* возмущения прогноза $I=\sqrt{E'_{prog}}$, от параметра Кориолиса l. При уменьшении $|l|$, как следует из (32), $\sqrt{E'_{slow}(T')}$ падает, т.е., как и в баротропном случае [13], в тропиках значимость возмущения поля массы уменьшается.

3.2.2. Оценим, пользуясь (30), значение $\sqrt{E'_{slow}(T')}$ для *реальных ошибок ОА температуры* в средних широтах. Ввиду отсутствия, как указывалось, детальной информации о трехмерной структуре поля T' примем дополнительное предположение об изотропии случайного поля T' в трехмерном пространстве (x, y, η). Такое предположение оправдывается тем, что в координатах (x, y, η) горизонтальный (одномерный) и вертикальный масштабы поля T' (напомним, поля ошибок ОА) оказываются примерно одинаковыми: около 250 км [21,29]. В этом случае, очевидно, спектральная плотность $f_{T'}$ инвариантна к поворотам в пространстве волновых векторов $\vec{k}$ и зависит только от $k=\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_\eta^2}$. Это обстоятельство существенно упрощает интегрирование (30) для вычисления $D\tilde{\Pi}_T$. Имеем (выкладки опускаем):

$$\sqrt{E'_{slow}(T')} = \frac{\sigma_{\tilde{\Pi}_T}}{\sqrt{2}} = \frac{R}{c_0\sqrt{6}} \sigma_{T'}. \tag{33}$$

Замечание. Физический смысл оператора $(-\Delta_3)^{-1/2}$, определяющего преобразование Π'_T в $\tilde{\Pi}_T$ согласно (27), может быть выявлен аналогично тому, как это сделано в [13]. Рассматривая этот оператор как *линейный фильтр*, имеющий *передаточную функцию* $H(\vec{k})=|\vec{k}|^{-1}$, можно найти его *весовую функцию* $h(\vec{x})$, как обратное преобразование Фурье функции $H(\vec{k})$ в смысле теории обобщенных функций. Как можно видеть (см. [1]) $h(\vec{x}) = 1/(2\pi^2|\vec{x}|^2)$. Отсюда применение оператора $(-\Delta_3)^{-1/2}$ к полю $f(\vec{x})$ есть фактически его трехмерное *сглаживание* (ср. с [13]):

$$(-\Delta_3)^{-1/2} f(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{f(\vec{x}-\vec{y})}{|\vec{y}|^2} d\vec{y}. \tag{34}$$

В соответствии с (27), характеристикой начального поля массы, определяющей ошибки численного прогноза, является среднеквадратичная ошибка поля *сглаженного в трехмерном пространстве, в силу (34), вертикального градиента температуры.* Что получается в результате такого преобразования поля температуры (дифференцирования по вертикали и трехмерного сглаживания) видно на примере двух частных случаев (монохроматическое и изотропное возмущения), рассмотренных выше: (32) и (33).

3.3. Соотношение вкладов ошибок ОА температуры и ветра. Пользуясь (22), (33), находим оценку относительного влияния на прогноз реальных ошибок ОА поля массы по сравнению с влиянием ошибок ОА поля ветра в средних широтах:

$$\rho = \sqrt{\frac{E'_{slow}(T')}{E'_{slow}(\vec{v}')}} = \frac{R}{c_0\sqrt{3}}\frac{\sigma_{T'}}{\sigma_{\vec{v}'_{\psi}}} \qquad (35)$$

Численное значение ρ мы получим, полагая $c_0 = RTN/g \approx 1\cdot 10^2$ м/с ($N \approx 1{,}5\cdot 10^{-2} c^{-1}$ [11]), и пользуясь, как и ранее, статистикой ошибок 6-часового численного прогноза в средних широтах Северного полушария на поверхности 500 гПа: $\sigma_{T'} = 1$ K [21], $\sigma_{\vec{v}'_{\psi}} = 4$ м/с, [21, 25]. Подставляя эти значения в (35), получаем $\rho \approx 0.4$.

Итак, аналогично баротропному случаю [13], основную роль в неточности численного краткосрочного прогноза, обусловленной неточностью ОА, играют ошибки ОА *ветра*, причем главным образом, его *соленоидальной* компоненты. Следующими по значению являются ошибки ОА поля *температуры*, влияние которых в 2-3 раза меньше.

4. Численные эксперименты

Для экспериментальной проверки полученных выше оценок была использована адиабатическая версия полусферной 15-уровенной спектральной модели Гидрометцентра России (усечение T40) [7] с инициализацией по нормальным модам [12] (инициализации подвергаются 8 первых вертикальных мод). Исследование влияния ошибок начальных полей модели (полей ОА) на ошибки прогноза осуществлялось путем возмущения начальных данных (температуры и ветра) и сравнения "возмущенного" прогноза с контрольным. Возмущения формировались так, чтобы имитировать поля ошибок реального ОА, соответственно выбирались их среднеквадратичные значения и пространственные масштабы. Использовано представление возмущения в виде произведения одной сферической гармоники Y_n^m по горизонтали на синусоиду, $\sin(H^{-1}\cdot\ln p - \alpha_0)$ по вертикали. Взяты значения $\sigma_{T'} = 1K, \sigma_{\vec{v}'_{\psi}} = 4$ м/с, $\sigma_{\vec{v}'_{\chi}} = 2$ м/с, m=10, n=30 (см. [13]), H=0,3 для возмущений ветра [18] и H=0,25 для возмущений температуры (см. выше). Трехмерные возмущения ветра генерировались путем возмущения полей потенциала скорости и функции тока с последующим аналитическим вычислением компонент ветра. Более подробное описание горизонтальной структуры возмущений см. в [13].

Анализировался прогноз заблаговременностью до 72 ч. Исследовано два случая (1 апреля 1996г. и 8 июня 1995г., срок 12 ч.). Влияние начальных возмущений на прогноз оценивалось по *энергии* возмущения прогностических полей E'_{prog} (13) , точнее, по "интенсивности" $I = \sqrt{E'_{prog}}$, чтобы не возводить эффект в квадрат [13]. В результате численных экспериментов для 24-часового прогноза обнаружено (ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ), что в соответствии с теоретическим анализом наиболее значимыми оказались возмущения соленоидального ветра, по сравнению с которыми влияние на прогноз возмущений температуры составило примерно 40%. Полученный результат устойчив: он практически идентичен для каждого из двух проанализированных сроков (заметим, относящихся к разным сезонам), слабо зависит от того, какая версия модели использована - адиабатическая или неадиабатическая и почти не меняется при варьировании начальных фаз возмущения по долготе и высоте.

Более детальное экспериментальное исследование влияния возмущений начальных полей (полей ОА) на прогноз дало следующие результаты.

1. Зависимость от горизонтального масштаба возмущения. Относительные оценки. На рис. 1 приведены графики зависимости относительной значимости начальных ошибок температуры по сравнению с ошибками соленоидального ветра $\rho = I(T^{'}) / I(\vec{v}_{\psi}^{'})$ от двумерного горизонтального масштаба L=a/n (a - радиус Земли) для заблаговременности t=25 мин (1 шаг прогностической схемы по времени, кривая 1, $\rho_0(L)$) и t=24 ч (кривая 2, $\rho_{24}(L)$). При изменении n мы сохраняли соотношение $m \approx n/3$ для обеспечения близости поля возмущения к изотропному в средних широтах (подробнее см. [13]). Не менялись и вертикальные масштабы: $H_{\vec{v}^{'}} = 0{,}3, H_{T^{'}} = 0{,}25$. На рис. 1 приведена также теоретическая зависимость $\rho_{theor}(L)$, полученная с помощью соотношений (22), (32) (кривая 3).

Анализируя результаты, представленные на рис. 1, мы отмечаем, что экспериментальные данные неплохо согласуются с теорией. Отличия "теоретической" кривой и кривой, соответствующей t=25 мин, невелики (5 – 11% в относительных величинах) и находятся в пределах точности теоретического анализа. Как и ожидалось, величина ρ существенно меньше единицы во всем диапазоне изменения L как для t=25 мин, так и для t=24 ч. Наблюдаемый рост ρ при увеличении L соответствует выводу теории геострофического приспособления о росте относительной роли поля массы на крупных масштабах по горизонтали. Отличие "теоретической" кривой от "экспериментальной", соответствующей t=0, обусловлено, частично, тем, что теоретический анализ проводился для модели на l-плоскости средних широт без учета изменения параметра Кориолиса на сферической Земле. Поэтому наблюдаемую близость теории и эксперимента следует считать весьма удовлетворительной.

Отклонения зависимости $\rho_{24}(L)$ от $\rho_{theor}(L)$ более заметны, что естественно, т.к. вышеприведенный теоретический анализ не учитывает роста начальных ошибок в прогнозе. Заметим однако, что скорости роста ошибок прогноза ветра и температуры оказываются близкими, так что теоретическая оценка ρ их *относительного* вклада сохраняет точность и для суточных прогнозов (см. рис. 1), а также и для 48-часовых прогнозов (на рисунке не приведено).

Результаты экспериментов, продемонстрированные на рис. 1, соответствуют первому из двух проанализированных сроков наблюдения (см. выше). Значения $\rho(L)$ для второго срока практически совпадают с приведенными на рис. 1, отличия не превышают 2% во всем диапазоне изменения L, что подтверждает достоверность полученных результатов. Такая близость обнаружена и в других описываемых ниже экспериментах, поэтому далее приводятся результаты только по первому из указанных выше сроков.

2. Зависимость от горизонтального масштаба возмущения. **Абсолютные оценки.** Вышеизложенный теоретический анализ дает оценки не только относительной, но и абсолютной роли ошибок ОА $\vec{v}_{\psi}^{'}$ и $T^{'}$, см. (22) и (32). Для выяснения качества этих оценок мы сравнили их с результатами экспериментов в том же диапазоне изменения L для t=25 мин (см. рис. 2). Видно, что и абсолютное влияние на сверхкраткосрочный прогноз предсказывается теорией достаточно хорошо. Что касается 24–часового прогноза (на рисунке не приведено), то рост ошибок за сутки составляет 20 – 50%, поэтому теоретические *абсолютные* оценки, в отличие от *относительных*, быстро теряют точность с ростом t и применимы только для ориентировочных расчетов.

На рис. 2 также приведены результаты экспериментов, в которых возмущению подвергалась потенциальная компонента ветра $\vec{v}'_{\chi}$ (кривая 5). Как и ожидалось, влияние таких возмущений невелико; по сравнению с влиянием возмущения $\vec{v}'_{\psi}$, оно составляет 22-27%, что, однако, значительно больше, чем в баротропной задаче [13]. Последнее объясняется тем, что в "бароклинном" возмущении $\vec{v}'_{\chi}$ (коротковолновом по вертикали, в соответствии с используемой статистикой ошибок 6-часового прогноза) значительная часть энергии приходится на мелкие моды, а значит на метеорологически значимые медленные гравитационные волны, в то время как "баротропное" возмущение возбуждает быстрые ГВ, отфильтровываемые схемой инициализации. С другой стороны, с ростом времени интегрирования прогностической схемы относительное влияние возмущения $\vec{v}'_{\chi}$ ослабевает, т.к., как показано ниже (рис. 4), такое возмущение практически не растет, тогда как возмущение $\vec{v}'_{\psi}$ быстро увеличивает свою энергию.

3. Зависимость от вертикального масштаба возмущения. На рис. 3 приведены графики тех же величин, что и на рис. 2 , в зависимости от H. Как и при анализе зависимостей, представленных на рис.2, мы убеждаемся, что экспериментальные данные в целом подтверждают вышеприведенный теоретический анализ. Как и ожидалось, влияние возмущений $\vec{v}'_{\psi}$ слабо зависит от H, а влияние возмущений T' увеличивается с уменьшением вертикального масштаба. Отметим, что для больших значений H (таких, что длина волны возмущения по вертикали становится соизмеримой с толщиной тропосферы) наблюдается заметная зависимость величины I от начальной фазы α_0 возмущения (напомним, синусоидального) по вертикали. Поэтому мы осредняли результаты по α_0. Эксперименты показали, что достаточным является осреднение по двум фазам $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_0 = \pi / 2$. Именно такое осреднение использовано в вышеописанных экспериментах.

4. Зависимости ρ от **времени интегрирования** прогностической схемы, а также от **широты возмущения** (среднеширотное или тропическое возмущение) близки к таковым в баротропной задаче [13]. В интервале 0 - 48 ч. величина ρ меняется мало, начиная расти на третьи сутки интегрирования. Роль возмущений температуры, в согласии с теоретическим анализом, оказалась больше в средних широтах, чем в тропиках в 1,5 - 2раза.

5. Для выявления **роли медленных гравитационных волн** мы провели следующие эксперименты. Мы изучали эволюцию во времени (при интегрировании модели) интенсивности начального возмущения потенциальной компоненты ветра $\vec{v}'_{\chi}$. Такие возмущения возбуждают главным образом ГВ (быстрые или медленные, в зависимости от вертикального масштаба возмущения). Как указывалось в п. 3.1, глубокие возмущения, проектирующиеся преимущественно на вертикальные моды с большой эквивалентной глубиной, а значит (см. [27,12]), имеющие большой вертикальный масштаб H, возбуждают быстрые ГВ; мелкие же возмущения возбуждают главным образом медленные ГВ. Для моделирования первых мы использовали "баротропное" возмущение $\vec{v}'_{\chi} = const(p)$ ($H = \infty$ - кривая 1 на рис. 4). Для моделирования медленных ГВ мы брали "бароклинное" возмущение $\vec{v}'_{\chi}$ (H=0,2 - кривая 2 на рис.4). Наконец, для сравнения, мы моделировали возмущение, возбуждающее (медленные) волны Россби - возмущение $\vec{v}'_{\psi}$ (H=0,3 - кривая 3 на рис. 4). Во всех трех случаях инициализация прогностической схемы была "отключена".

Как видно из рис. 4 , Россби-возмущение начинает расти с самого начала интегрирования модели, за первые 24 ч рост – 27%. В то же время возмущение, проектирующееся на быстрые ГВ, резко уменьшает свою величину в начале интегрирования, за первые 24 ч падает в 5,4 раза.

Медленные же ГВ практически не затухают, хотя и не растут, за первые 24 ч изменение не превышает 1,5%. Заметим, что небольшой рост "гравитационных" возмущений на вторые и третьи сутки интегрирования объясняется, по-видимому, накоплением влияния нелинейного взаимодействия затухающих, почти стационарных и растущих волн и ростом энергии последних.

Итак, мы экспериментально обнаружили, что *быстрые* ГВ весьма интенсивно затухают в модели турбулентной атмосферы (адиабатический вариант прогностической схемы [7] включает горизонтальный и вертикальный турбулентный обмен импульсом; использование неадиабатического варианта модели дало полностью аналогичные результаты). Это согласуется с теоретическими результатами [5]. Следовательно, быстрые ГВ мы можем считать метеорологически незначимыми. В то же время, при интегрировании прогностической модели медленные ГВ практически не затухают и потому являются для нас значимыми при оценке влияния ошибок ОА на численный, особенно краткосрочный, прогноз. Этот вывод экспериментально обосновывает анализ п. 3.1 о влиянии ошибок ОА ветра на прогноз.

Выводы

Характер и величина погрешностей современных схем объективного анализа полей геопотенциала, температуры и ветра в тропосфере и нижней стратосфере таковы, что главным источником ошибок численного краткосрочного прогноза погоды, обусловленных ошибками ОА, оказывается, как показано в данной работе, неточность ОА *поля ветра.* Влияние на прогноз ошибок ОА *поля массы* - в 2-3 раза меньше. Мы также нашли те существенные *характеристики* полей ошибок ОА ветра и массы, которые непосредственно определяют влияние ошибок ОА на прогноз в бароклинной задаче (заметим, эти характеристики являются глобальными, а не локальными по своей природе). Для поля ветра - это среднеквадратичная погрешность ОА *соленоидальной* составляющей ветра $\sigma_{\vec{v}'_{\psi}}$. Для поля массы - среднеквадратичная ошибка поля *сглаженного в трехмерном пространстве, в силу* (34), *вертикального градиента температуры.* Эти характеристики имеют приближенный характер и применимы только для полей ошибок ОА, имеющих структуру, близкую к структуре полей ошибок реально существующих на сегодняшний день схем ОА. Отметим, что в теоретическом анализе мы не учитывали рост ошибок в ходе прогноза, поэтому полученные результаты наиболее точны для краткосрочного прогноза (до 2 суток), хотя можно ожидать, что качественные закономерности сохранят силу и для среднесрочного прогноза.

Выявленные *существенные* для краткосрочного прогноза характеристики ("нормы") ошибок ОА полей ветра и массы позволяют сформулировать требования к полям ОА, а также направления, по которым следует совершенствовать схемы ОА. Именно, основное внимание должно быть уделено повышению точности ОА *ветра*. Гораздо меньшего эффекта можно достичь в прогнозе, уточняя ОА геопотенциала и температуры, при этом целью должно быть уменьшение дисперсии ошибок ОА *температуры и вертикального градиента температуры*, что, в частности, диктует необходимость согласованности полей геопотенциала на смежных уровнях по вертикали. И, наконец, минимальным, почти неощутимым будет эффект от уточнения "баротропной" компоненты поля массы - поля давления на уровне моря (приземного давления) [26, 13]. Полученные результаты относятся к анализу и прогнозу полей синоптического и подсиноптического масштаба.

Задача повышения точности ОА ветра может решаться одним из двух способов. Во-первых, путем использования при ОА новых ветровых наблюдательных систем (профилемеров, лидаров и пр.). Во-вторых, путем совершенствования схем *многоэлементного* ОА (или четырехмерного усвоения данных) для уточнения ОА ветра по данным наблюдений *термической* структуры атмосферы (например, спутниковых наблюдений). Предложенный в данной работе подход может быть использован и для решения других задач, связанных с влиянием ошибок ОА на прогноз. В частности, для изучения влияния на прогноз данных измерений различных наблюдательных систем, например, одноуровенных данных, спутниковых наблюдений и др.

В заключение отметим, что полученные в данной работе (см. также [13]) выводы об *относительном* влиянии ошибок ОА полей ветра, геопотенциала и температуры на прогноз близки к результатам элементарного анализа вклада ошибок ОА в ошибки линеаризованного потенциального вихря [30]. В то же время, выводы об *абсолютном* влиянии ошибок ОА на прогноз, а также о том, *какие* характеристики полей ветра и массы определяют точность прогноза, не могут быть получены с помощью элементарного анализа [30].

Развитие идей, предложенных в данной работе, дано в работах [31] и [33]. В этих статьях рассматриваются поля ошибок, имеющие более реалистичную пространственную структуру и, в частности, использующие ковариационную модель “пропорциональных масштабов”, предложенную в [32]. Кроме того, в [33] рассматривается влияние не начальных полей прогноза, как в данной работе и в [31], а непосредственно данных наблюдений полей ветра и массы. Основной вывод о доминирующей роли ветра сохраняется.

Автор благодарит Е.Д.Астахову за помощь в работе со спектральной прогностической схемой Гидрометцентра России и А.И.Важника за ряд ценных замечаний по тексту статьи. Работа поддержана Франко-Российским центром им. А.М.Ляпунова, проект 02-05.

Список литературы

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Москва.: Наука, 1988, 512 С.
2. Гилл А. Динамика атмосферы и океана. – М.: Мир, 1986, 398 С.
3. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Вычислительные аспекты. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987, 264 С.
4. Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. - Л.: Гидрометеоиздат, 1969, 196 С.
5. Кадышников В.М. О влиянии турбулентности на геострофическую адаптпцию баротропной атмосферы. //Метеорология и гидрология.- 1976. - N7. - С.36-44.
6. Кадышников В.М., Лосев В.М., Бурштейн А.Б. Нелинейная инициализация методом нормальных мод в бароклинной региональной неадиабатической модели атмосферы.//Метеорология и гидрология. - 1991. - N2. - С.24-31.
7. Курбаткин Г.П., Дегтярев А.И., Фролов А.В. - Спектральная модель атмосферы, инициализация и база данных для численного прогноза погоды. - СПб.: Гидрометеоиздат, 1994, 184 С.

8. Монин А.С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. - Л.: Гидрометеоиздат, 1988, 424 С.
9. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Том 1. - СПб.: Гидрометеоиздат, 1965, 639 С.
10. Обухов А.М. К вопросу о геострофическом ветре. //Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз..-1949. - Т.13. - N4. - С.281-306 (имеется в кн. Обухов А.М. Турбулентность и динамика атмосферы. - Л.. Гидрометеоиздат, 1988, С.210-240) .
11. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. - М.: Мир, 1984, 811 С.
12. Покудов А.В. Релаксационный метод нелинейной инициализации по нормальным модам. //Метеорология и гидрология. – 1989. – N4. – С.109-11.
13. Цырульников М.Д. Относительное влияние ошибок объективного анализа геопотенциала и ветра на баротропный численный краткосрочный прогноз метеорологических величин. //Метеорология и гидрология". - 1997. - N11. – С.40-54.
14. Blumen W. Geostrophic adjustment. - Rev. Geophys. Space Phys., 1972, v.10, N2, 485-528.
15. Charney J.G. Geostrophic turbulence. - J. Atm. Sci., 1971, v.28, N6, 1087-1095.
16. Cohn S.E., Dee D.P. An analysis of the vertical structure equation for arbitrary thermal profiles. - Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1989, v. 115, 143-171.
17. Errico R., Baumhefner D. Predictability experimentsusing a high-resolution limited-area model. - Mon. Wea. Rev., 1987, v.115, N2, 488-504.
18. Hollingsworth A., Lönnberg P. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part I. The wind field. - Tellus, 1986, v.38A, 111-136.
19. Hoskins B., McIntyre M., Robertson A. On the use and significance of isentropic potential-vorticity maps. - Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1985, v.111, N470, 877-946.
20. Kasahara A. Resent matematical and computational developments in numerical weather prediction. - Proc. Conf. "Large Scale Scientific Computations", Madison, Wisc., May 17-19, 1983, Orlando, 1984, 85-125.
21. Lönnberg P., Hollingsworth A. The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part II. The covariance of height and wind fields. - Tellus, 1986, v.38A, 137-161.
22. Lynch P. The slow equations. - Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1989, v.115, N485, 201-219.
23. Lynch P., McDonald A. A multi-level limited area slow-equation model: application to initialization. - Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1990, 116, N493, 595-609.
24. Machenhauer B. On the dynamics of gravity oscillations in a shallow-water model, with application to normal mode intialization. - Contrib. Atmos. Phys., 1977, v.50, 253-271.
25. Mitchell H.L., Charette C., Chouinard C.,Brasnett B. Revised interpolation statistics for the Canadian data assimilation procedure, their derivation and application. - Mon. Wea. Rev., 1990, v 118, N8, 1591-1614.
26. Smagorinsky J., Miyakoda K., Strickler R.F. The relative importance of variables in initial conditions for dynamical weather prediction. - Tellus, 1970, v.22, 141-157
27. Temperton C. Implicit normal mode initialization.- Mon. Wea. Rev., 1988, v.116, N5, 1013-1031.
28. Temperton C. and Williamson D.L. Normal mode initialization for a multilevel grid-point model. Part 1: linear aspects. - Mon. Weather Rev., 1981v. 109, 729—743.
29. Thiebaux H.J., Mitchell H.L., Shantz D.W. Horizontal tructure of hemispheric forecast error correlations for geopotential and temperature. - Mon. Wea. Rev., 1986, v.114, N6, 1048-1066.
30. Tsyroulnikov M.D. Potential vorticity analysis of realistic objective analysis mass and wind errors. - Research Activities in Atmospheric and Oceanic Modelling, WMO, 1997, Rep. N 25, p. 1.69.
31. Tsyroulnikov M.D. On the relative significance of initial mass and wind errors in short-range weather forecasting. - Proc. of the 3rd WMO Symp. on Assimil. of Observations in Meteor. and Oceanogr., 7-11 June, 1999, Quebec City, Canada, WMO, 2000, WMO-TD N 986, 65-68.

32. Tsyroulnikov M.D. Proportionality of scales: an isotropy-like property of geophysical fields. - Quart. Journal of the Royal Meteorological Society, 2001, v. 127, 2741-2760.
33. Tsyroulnikov M.D. On the relative importance of initial wind and mass observations in numerical weather forecasting – Submitted to Dynamics of Atmospheres and Oceans, 2001, revised version July 2002.
34. Williamson D.L., Temperton C. Normal mode initialization for a multi-level grid-point model. Part II: nonlinear aspects. - Mon. Wea. Rev., 1981, v.109, N4, 744-757.