Е.М.Пекелис

Численные схемы для оператора адвекции в модели локального прогноза

Построению численных схем, аппроксимирующих операторы нелинейного и квазилинейного переноса, посвящена значительная литература. В зависимости от специфики физической задачи на первый план выходят требования более точного описания тех или иных эффектов, что, в свою очередь, обусловливает методику дискретной аппроксимации дифференциального оператора. Приведенные ниже схемы разрабатывались для использования в моделях численного прогноза погоды, где операторы указанного типа «отвечают» за процессы адвективного переноса. Вклад этих процессов в атмосферную циркуляцию возрастает, если в прогностическую модель вводится учет орографии. Специфика данного контекста определила основные требования к схемам аппроксимации оператора переноса.

1) При учете орографии поля компонентов скорости становятся весьма негладкими не только по вертикальной, но и по горизонтальным координатам. В этих условиях обычные вычислительные предположения о малой изменчивости компонентов скорости на расстоянии шага сетки становятся неоправданными. Возникает задача построения вычислительных алгоритмов для адвективного переноса, учитывающих изменчивость его скорости не только с переходом от одной расчетной точки к другой, но и при расчете в данной точке – изменчивость скорости указанного переноса в окрестности этой точки.

2) Учет орографии выполняется заменой исходной декартовой системы координат – новой, связанной с рельефом. В этой новой системе координат скорость вертикальной адвекции не совпадает с вертикальным компонентом скорости в прежней декартовой системе и может превосходить его на порядок даже в условиях пологого рельефа. В этой связи, численный алгоритм расчета вертикальной адвекции в прогностической схеме должен содержать элементы неявной аппроксимации, чтобы обеспечивать вычислительную устойчивость схемы. Таким образом, предлагаемые схемы должны допускать разные варианты аппроксимации пространственных производных – явные, неявные либо промежуточные.

Рассмотрим уравнение одномерного переноса субстанции $\varphi(t,x)$ вдоль оси x со скоростью $u(t,x)$, где t – время:

$$\partial\varphi / \partial t + u \cdot \partial\varphi / \partial x = 0. \qquad (1)$$

Уравнение данного вида моделирует нелинейный адвективный перенос гидротермодинамических атмосферных характеристик в прогностической модели.

В качестве исходной вычислительной схемы, подлежащей развитию, примем известную схему «направленных разностей» (для простоты обозначений будем говорить о точке пространственной дискретной сетки с индексом «0» и о переходе от момента времени «0» к моменту времени «1»; пространственный индекс указываем внизу переменной, временной – вверху; см. рис. 1):

$$\frac{\varphi_0^1 - \varphi_0^0}{\tau} + u_0^0 \cdot \frac{\varphi_o^o - \varphi_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}} = 0, \text{ если } u_0^0 \ge 0;$$

$$\frac{\varphi_0^1 - \varphi_0^0}{\tau} + u_0^0 \cdot \frac{\varphi_1^o - \varphi_0^0}{x_1 - x_0} = 0, \text{ если } u_0^0 \le 0.$$

Или:

$$\varphi_0^1 = (1 - (r_0)_l) \cdot \varphi_o^o + (r_0)_l \cdot \varphi_{-1}^0, \text{ если } (r_0)_l \ge 0; \qquad (2а)$$

$$\varphi_0^1 = (1 + (r_0)_r) \cdot \varphi_o^o - (r_0)_r \cdot \varphi_1^0, \text{ если } (r_0)_r \le 0. \qquad (2б)$$

В выражениях (2а) и (2б) через $(r_0)_l$ и $(r_0)_r$ обозначены «левое» и «правое» числа Куранта в точке x_0:

$$(r_0)_l = \tau \cdot u_0^0 /(x_o - x_{-1}),\ (r_0)_r = \tau \cdot u_0^0 /(x_1 - x_0), \qquad (3)$$

где τ - временной шаг расчетной сетки.

Условие устойчивости схемы (2а,б):

$$(r_0)_l \le 1, \text{ если } (r_0)_l \ge 0;$$

$$\left|(r_o)_r\right| \le 1, \text{ если } (r_0)_r \le 0.$$

Строго это условие устанавливается посредством Фурье-анализа, если число Куранта постоянно.

Физический смысл схемы (2а,б): если $u_0^0 \ge 0$, искомое значение φ_0^1 принимается равным значению переменной φ^o в точке x, удовлетворяющей $x_{-1} \le x \le x_0$, из которой, двигаясь со скоростью u_0^0, она за время τ переместится в точку x_0 (см. рис.1). Значение $\varphi^o(x)$ определяется линейной интерполяцией по значениям φ_{-1}^0 и φ_0^0. Если условие устойчивости $(r_0)_l \le 1$ выполнено, то такая точка всегда найдется. Аналогично, если $u_0^0 \le 0$, искомое значение φ_0^1 принимается равным φ^o в соответствующей точке $x_0 \le x \le x_1$. Снова: если условие устойчивости $\left|(r_o)_r\right| \le 1$ выполнено, такая точка всегда найдется.

Таким образом, схема направленных разностей подразумевает, что скорость переноса u^0 равна u_0^0 на всем шаге пространственной сетки $[x_{-1}, x_0]$, если $u_0^0 \ge 0$, или на всем шаге сетки $[x_0, x_1]$, если $u_0^0 \le 0$. Отсюда, естественное обобщение данной схемы заключается в учете переменного распределения величины u^0 в окрестности данной расчетной точки x_0. Естественно считать, что скорость u^0 на отрезке $[x_{-1}, x_0]$ распределена линейно между значениями u_{-1}^0 и u_0^0, а на отрезке $[x_0, x_1]$ - линейно между значениями u_0^0 и u_1^0. (Можно было бы предположить, что u^0 распределено по квадратичной параболе, принимающей в точках x_{-1}, x_0, x_1 значения u_{-1}^0, u_0^0, u_1^0 соответственно, но схемы этого вида до настоящего времени не изучались и в прогностической модели не апробировались.)

Рассмотрим сначала случай $u_0^0 \ge 0$. Положение произвольной точки x на отрезке $[x_{-1}, x_0]$ будем характеризовать безразмерным параметром r согласно соотношению

$$r = (x_0 - x)/(x_o - x_{-1}),\ 0 \le r \le 1. \qquad (4a)$$

Линейное распределение величины u^0 на $[x_{-1}, x_0]$ имеет вид:

$$u^0 = u_0^0 + (x_0 - x)/(x_o - x_{-1}) \cdot (u_{-1}^0 - u_0^0) = u_0^0 + r \cdot (u_{-1}^0 - u_0^0). \qquad (5a)$$

Найдем то значение r, при котором субстанция φ, двигаясь из точки x, определяемой соотношением (4а), со скоростью, определяемой выражением (5а), через время τ достигнет точки x_0. Записывая, что путь равен произведению скорости на время, получаем уравнение относительно искомой величины r:

$$r \cdot (x_o - x_{-1}) = (u_0^0 + r \cdot (u_{-1}^0 - u_0^0)) \cdot \tau$$

или

$$r = \frac{1}{1 + (r_0)_l - r_{-1}} \cdot (r_0)_l, \qquad (6a)$$

где $(r_0)_l$ - «левое» число Куранта в точке x_0, см. (3), а r_{-1} - значение числа Куранта в точке x_{-1}:

$$r_{-1} = \tau \cdot u_{-1}^0 / (x_o - x_{-1}). \qquad (7а)$$

Считая, что субстанция φ распределена на отрезке $[x_{-1}, x_0]$ линейно, аналогично скорости u^0,

$$\varphi^0 = \varphi_0^0 + r \cdot (\varphi_{-1}^0 - \varphi_0^0) = r \cdot \varphi_{-1}^0 + (1-r) \cdot \varphi_0^0,$$

получаем разностный аналог уравнения (1), который теперь, в отличие от выражения (2а), реализующего схему направленных разностей, имеет вид

$$\varphi_0^1 = \frac{(r_0)_l}{1+(r_0)_l - r_{-1}} \cdot \varphi_{-1}^0 + \frac{1-r_{-1}}{1+(r_0)_l - r_{-1}} \cdot \varphi_0^0. \qquad (8а)$$

Если считать, что дискретная аппроксимация ($\partial\varphi / \partial t$) выполняется простейшим образом,

$$\partial\varphi / \partial t \approx (\varphi_0^1 - \varphi_0^0) / \tau,$$

схема (8а) означает, что для аппроксимации слагаемого $u \cdot \partial\varphi / \partial x$ принимается соотношение

$$\tau \cdot u \cdot \partial\varphi / \partial x \approx r \cdot (\varphi_0^0 - \varphi_{-1}^0). \qquad (9а)$$

При $u_0^0 < 0$, соотношения (4а)-(9а) заменяются очевидным образом

$$r = (x_0 - x)/(x_1 - x_0), \ -1 \le r \le 0; \qquad (4б)$$

$$u^0 = u_0^0 + (x_0 - x)/(x_1 - x_0) \cdot (u_0^0 - u_1^0) = u_0^0 + r \cdot (u_0^0 - u_1^0); \qquad (5б)$$

$$r = \frac{1}{1-(r_0)_r + r_1} \cdot (r_0)_r; \qquad (6б)$$

$$r_1 = \tau \cdot u_1^0 / (x_1 - x_0); \qquad (7б)$$

$$\varphi_0^1 = -\frac{(r_0)_r}{1-(r_0)_r + r_1} \cdot \varphi_1^0 + \frac{1+r_{-1}}{1-(r_0)_r + r_1} \cdot \varphi_0^0; \qquad (8б)$$

$$\tau \cdot u \cdot \partial\varphi / \partial x \approx r \cdot (\varphi_1^0 - \varphi_0^0). \qquad (9б)$$

Приведенная вычислительная схема (8а,б) очевидно теряет смысл, если $r_{-1} = (r_0)_l + 1$, в случае $u_0^0 > 0$, либо если $r_1 = (r_0)_r - 1$, в случае если $u_0^0 < 0$. Происхождение данного обстоятельства очевидно. Так как речь идет об интегрировании уравнения с переменными коэффициентами, среди решений возможны такие, которые при некоторых значениях независимых переменных t и x не описываются дифференциальным уравнением (1) и не аппроксимируются его дискретными аналогами, подобными схеме направленных разностей. В частности, при $u_0^0 > 0$ равенство $r_{-1} = (r_0)_l + 1$ отражает тот факт, что значение φ_{-1}^0, смещаясь вправо со скоростью u_{-1}^0, через время τ «догонит» значение φ_0^0, смещающееся со скоростью u_0^0, и в решении образуется разрыв, не описываемый уравнением (1) и его дискретными аналогами. Сходный смысл имеет равенство $r_1 = (r_0)_r - 1$, в случае если $u_0^0 < 0$. Очевидно, не только такие значения r_{-1} (или r_1), но и близкие к ним значения не должны допускаться при выполнении расчета, поскольку они чреваты развитием вычислительной неустойчивости. Какую, конкретно, окрестность «критических» значений r_{-1} или r_1 необходимо исключить из расчета для обеспечения устойчивости схемы – ответ на этот вопрос зависит от (заранее неизвестного) характера разыскиваемого решения. Поэтому мы ограничимся более жестким достаточным ограничением на величину числа Куранта, которое дает изучение устойчивости схемы (8а,б).

В случае постоянного числа Куранта схема (8а,б) совпадает со схемой направленных разностей и условие устойчивости имеет вид $|r| \le 1$. Пусть теперь число Куранта – переменное и пусть $(r_0)_1 > 0$ (т.е. $u_0^0 > 0$). Поскольку схема – явная и область ее влияния распространяется на один интервал сетки, можно думать, что условиями устойчивости будут

$$(r_0)_1 \le 1,\ r_{-1} \le 1. \qquad (10)$$

Однако, первое из этих условий оказывается лишним. В самом деле, согласно (8а) неизвестная величина с будущего временного слоя дается линейной комбинацией двух величин с прежнего слоя. Второго из условий (10) достаточно, чтобы оба коэффициента данной линейной комбинации были положительными и меньшими единицы, сумма же их всегда равна единице. Следовательно, если

$$r_{-1} \le 1, \qquad (11а)$$

то

$$\left|\varphi_0^1\right| \le \max\left\{\left|\varphi_0^0\right|, \left|\varphi_{-1}^0\right|\right\}.$$

Аналогично, если

$$\left|r_1\right| \le 1, \qquad (11б)$$

то для величины φ_0^1, найденной в силу соотношения (8б),

$$\left|\varphi_0^1\right| \le \max\left\{\left|\varphi_0^0\right|, \left|\varphi_1^0\right|\right\}.$$

Окончательно, если в каждой расчетной точке x_k для момента времени «0» оба числа Куранта, «левое» и « правое», не превосходят по абсолютному значению единицу:

$$\left|\tau \cdot u_k^0 /(x_k - x_{k-1})\right| \le 1,\ \left|\tau \cdot u_k^0 /(x_{k+1} - x_{k})\right| \le 1, \qquad (12)$$

то норма вектора значений φ в момент времени «1», найденного согласно схеме (8а,б), не превзойдет в метрике С-пространства норму вектора значений φ в момент времени «0». В прогностической системе фигурируют уравнения более общего вида, чем уравнение переноса (1), поэтому условие (12) не гарантирует устойчивости расчета, но может быть принято как исходный ориентир, подлежащий дальнейшему экспериментальному уточнению.

Перейдем к вопросу о неявных аналогах схемы (8а,б), необходимых, если допускать значения чисел Куранта, большие единицы по модулю. Такая необходимость возникает, во всяком случае, при расчете вертикальной адвекции в условиях учета орографии.

В случае $(r_0)_1 > 0$, наибольшим значением r_{-1}, при котором может применяться явная схема (8а), согласно вышеприведенным соображениям будем считать $r_{-1} = 1$. В этом случае (8а) дает $\varphi_0^1 = \varphi_{-1}^0$. Соответственно, при $(r_0)_r < 0$ и $r_1 = -1$ схема (8б) дает $\varphi_0^1 = \varphi_1^0$. Если $r_{-1} > 1$, то значение φ^0, которое приносится в x_0 за время τ, расположено в момент времени «0» в точке левее x_{-1}, и по явной трехточечной схеме рассчитано быть не может. В этом случае необходимо обратиться к какому-либо аналогу схемы (8а,б), использующему элемент неявной аппроксимации. Но прежде всего, следует обобщить выражения (6а,б) для величины r, чтобы они сохраняли смысл при любых значениях u_{-1}^0, u_0^0, u_1^0. Любое такое обобщение по существу будет эквивалентно некоторому предположению о поведении скорости переноса u_0 при $x < x_{-1}$ и $x > x_1$ (предположению априорному, не связанному с фактическим распределением u_0 за пределами вычислительного шаблона, поскольку мы хотим сохранить схему трехточечной, ограниченной точками x_{-1}, x_0, x_1). Примем простейшее предположение: при $x < x_{-1}$, $u^0 = u^0_{-1}$; при $x > x_1$, $u^0 = u^0_1$. Это означает, что вместо выражений (6а,б) для величины r принимается в случае u^0_0>0:

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + (r_0)_1 - r_{-1}} \cdot (r_0)_1 & \text{если} \cdot r_{-1} \le 1, \\ r_{-1} & \text{если} \cdot r_{-1} > 1, \end{cases} \qquad (13а)$$

и в случае u^0_0<0:

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{1 - (r_0)_r + r_1} \cdot (r_0)_r & \text{если} \cdot r_{-1} \le 1, \\ r_1 & \text{если} \cdot r_{-1} > 1. \end{cases} \qquad (13б)$$

Укажем возможные обобщения схемы (8а,б) за счет привлечения элементов неявной аппроксимации, чтобы расчет сохранял устойчивость также и при $|r| > 1$. В этом случае точка x, из которой значение φ^0 в точку x_0 в момент «1» может быть расположена как левее, так и правее точки x_{-1} (в случае u^0_0>0), либо левее или правее точки x_1 (в случае u^0_0<0) – как показано на рис. 1.

Приведем два варианта обобщения схемы (8а,б). В первом варианте определим расположение точки пересечения луча, по которому значение φ^0 за время τ переносится из точки x в точку x_0, с отрезком AB. Такими точками при u^0_0>0 будут или точка C_1 (для случая $r < 1$) или точка C_2 (для случая $r > 1$). Значение φ в такой точке равно (в рамках принятых представлений о том, как совершается перенос) величине φ^1_0. Вместе с тем, легко видеть, что отношение, в котором отрезок AB делится такой точкой (считая от точки A), независимо от величины r равно 1: r. Отсюда, принимая линейную интерполяцию переменной φ между точками A и B, находим, что

$$\varphi^1_0 = \frac{1}{1+r} \cdot \varphi^0_0 + \frac{r}{1+r} \cdot \varphi^1_{-1}, \qquad (14а)$$

что соответствует аппроксимации $\tau \cdot u \cdot \partial\varphi / \partial x \approx r \cdot (\varphi^1_0 - \varphi^1_{-1})$ вместо аппроксимации (9а). При u^0_0<0 находим

$$\varphi^1_0 = \frac{1}{1-r} \cdot \varphi^0_0 - \frac{r}{1-r} \cdot \varphi^1_1, \qquad (14б)$$

что соответствует аппроксимации $\tau \cdot u \cdot \partial\varphi / \partial x \approx r \cdot (\varphi^1_1 - \varphi^1_0)$ вместо аппроксимации (9б).

Уравнения (14а,б) относительно неизвестных должны решаться прогонкой.

Во втором варианте поступаем следующим образом. Вычисляем r согласно (13а) или (13б). При $|r| \le 1$ используем одну из явных расчетных формул, (8а), если $u^0_0 > 0$, или (8б), если $u^0_0 < 0$. При $|r| > 1$, вводим элемент неявной аппроксимации. Пусть, например, $r > 1$ $(u^0_0 > 0)$. В этом случае находим (см. рис. 1), что точка H делит отрезок FA (считая от точки

F) в отношении $(r-1)/1$. Полагая, что значение $\varphi(H)$ дается линейной интерполяцией значений $\varphi(F)=\varphi_{-1}^{0}$ и $\varphi(A)=\varphi_{-1}^{1}$, находим, вместо (14а),

$$\varphi_0^1=\varphi(H)=\frac{1}{r}\varphi_{-1}^0+\frac{r-1}{r}\varphi_{-1}^1, \qquad (15а)$$

что соответствует явной/неявной аппроксимации

$$\tau u(\partial\varphi/\partial x)\sim\varphi_0^0-\varphi_{-1}^0+(r-1)(\varphi_0^1-\varphi_{-1}^1),$$

в которой доля неявной аппроксимации растет с ростом r.

При $u_0^0<0$ и $r<-1$, находим аналогично, вместо (14б),

$$\varphi_0^1=-\frac{1}{r}\varphi_1^0+\frac{r+1}{r}\varphi_1^1, \qquad (15б)$$

что соответствует аппроксимации

$$\tau u(\partial\varphi/\partial x)\sim-(\varphi_1^0-\varphi_0^0)+(r+1)(\varphi_1^1-\varphi_0^1),$$

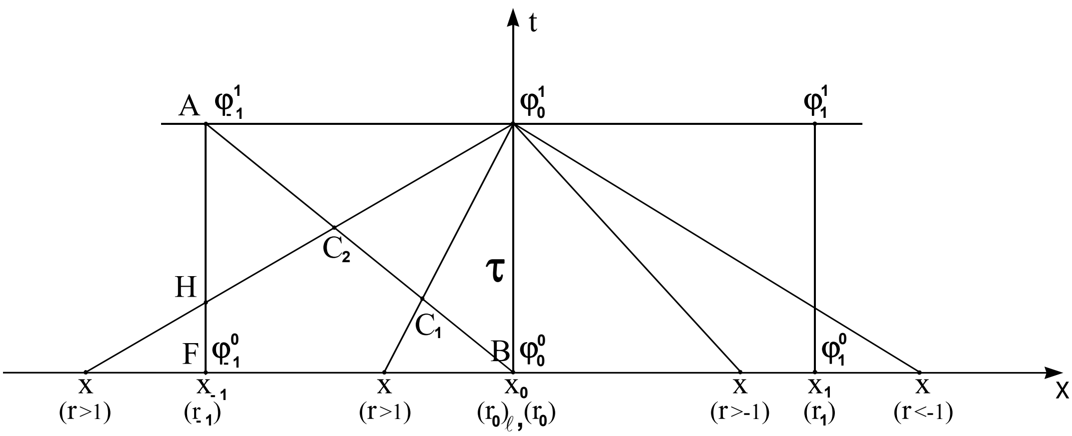

Рис. 1. Схема расчетной сетки.

Обе схемы (14а,б) и (8а,б), (15а,б) – в тривиальном случае r=const устойчивы при любом значении r. В случае же переменного профиля u^0 (и, соответственно, r), для обеих схем, поскольку они заключают элементы неявной аппроксимации, невозможен не только Фурье-анализ устойчивости, но и анализ, подобный тому, который был проведен для явной схемы (8а,б). Схема (14а,б) использует полностью неявную аппроксимацию производной $(\partial\varphi/\partial x)$, а схема (8а,б), (15а,б) – частично неявную, откуда естественно предположить – и численные эксперименты это подтверждают – что схема (14а,б) сохраняет устойчивость на более широком классе решений, чем схема (8а,б), (15а,б). Одновременно, большая устойчивость схемы (14а,б) связана с большей величиной счетной вязкости и соответствующим ухудшением аппроксимации, сравнительно со схемой (8а,б), (15а,б).

Все вышеизложенные схемы базируются на предположении, что на временном отрезке τ субстанция φ переносится из некоторой точки x в точку x_0 с постоянной скоростью. Переменность скорости переноса u^0 учитывается лишь в том отношении, что из разных начальных x-точек перенос в конечную точку x_0 совершается с разной скоростью. Естественным завершающим уточнением – в рамках избранных общих представлений –

будет учет того, что скорость меняется также и в процессе переноса из каждой конкретной x-точки в точку x_0.

Начнем, как и выше, со случая $u_0^0 > 0\,\left((r_0)_l > 0\right)$. Найдем, как меняется со временем величина r в точке, смещающейся с переменной скоростью u^0, даваемой выражением (5а). Дифференцируя по времени соотношение (4а), определяющее r, получим:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{x_0 - x_1}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x_0 - x_1}u^0 = -\frac{1}{x_0 - x_{-1}}\left[u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)\right].$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, определяющее зависимость r(t), имеет вид:

$$\frac{dr}{dt} + \frac{u_{-1}^0 - u_0^0}{x_0 - x_{-1}}r = -\frac{u_0^0}{x_0 - x_{-1}},$$

откуда

$$r(t) = C\cdot\exp\left(\frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}}t\right) + \frac{u_0^0}{u_0^0 - u_{-1}^0} = C\cdot\exp\left[\left((r_0)_l - r_{-1}\right)\frac{t}{\tau}\right] + \frac{(r_0)_l}{(r_0)_l - r_{-1}}.$$

Постоянная интегрирования определяется из условия $r(\tau) = 0$, и окончательно:

$$r(t) = \frac{(r_0)_l}{r_{-1} - (r_0)_l}\cdot\left\{\exp\left[\left(r_{-1} - (r_0)_l\right)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right] - 1\right\}.$$

Искомая величина r, определяющая, согласно (4а), начальную точку x, которая, двигаясь с переменной скоростью (5а), переместится за время τ в точку x_0, дается значением $r(0)$:

$$r = \frac{\exp\left(r_{-1} - (r_0)_l\right) - 1}{r_{-1} - (r_0)_l}(r_0)_l,\ \ (r_0)_l > 0. \qquad (16а)$$

Аналогичные выкладки на основе соотношений (4б), (5б) дают для случая $u_0^0 < 0\,\left((r_0)_r < 0\right)$:

$$r = \frac{\exp\left((r_0)_r - r_1\right) - 1}{(r_0)_r - r_1}(r_0)_r,\ (r_0)_r < 0. \qquad (16б)$$

Подведем итог. Отправляясь от схемы «направленных разностей», получаем трехуровневую иерархию численных схем описания адвективного переноса,. Все схемы базируются на выражении, определяющем (через известные величины) параметр r, который, в свою очередь, определяет положение той точки x в начальный момент времени «0», которая к моменту времени «1» сместится в точку x_0, принеся туда искомое значение субстанции φ. Для исходной модели «направленных разностей» скорость переноса считается независимой от x-координаты и равной u_0^0 слева от точки x_0 (если u_0^0>0) или справа (если u_0^0<0). Выражение для r в этом случае формируется, исходя только из этого значения u_0^0, и равно, согласно (3), $(r_0)_l$ либо $(r_0)_r$ для u_0^0>0, либо u_0^0<0 соответственно. В модели следующего уровня перенос субстанции φ из начальной точки x в конечную точку x_0 по-прежнему считается совершающимся с постоянной скоростью, но сама эта скорость теперь зависит от положения начальной x-точки, согласно линейным соотношениям (5а), (5б). В этом случае в выражениях для величины r прежние значения $(r_0)_l$ и $(r_0)_r$ снабжаются множителями, согласно (6а) и (6б). Эти выражения теряют смысл при сильной переменности профиля скорости u^0, подразумевающей «опрокидывание» потока на протяжении τ-интервала времени, и должны быть дополнены ограничениями (11а,б). Наконец, в последней модели скорость потока считается не только зависящей от положения начальной x-точки, но и меняющейся, согласно тем же соотношениям (5а,б), по мере того, как точка, на протяжении времени τ, смещается вдоль оси x. В этом случае в выражениях для величины r значения $(r_0)_l$ и $(r_0)_r$ снабжаются другими множителями, согласно (16а,б). Обратим внимание, что, в отличие от модели предыдущего уровня, теперь множители, которыми снабжаются величины $(r_0)_l$ и $(r_0)_r$, - гладкие функции разности чисел Куранта, δ_l или δ_r,

$$\delta_l = r_{-1} - (r_0)_l,\ \delta_r = (r_0)_r - r_1, \tag{17}$$

монотонно растущие от нуля до бесконечности с ростом δ_l и δ_r от $-\infty$ до $+\infty$. Это очевидно соответствует тому, что в данной физической модели «опрокидывание» потока в пределах τ-интервала времени – невозможно. При $(r_0)_l > 0$ и $\delta_l = 0$, а также при $(r_0)_r < 0$ и $\delta_r = 0$ - т.е. в случае, если перенос в каком-либо направлении совершается с постоянной скоростью – множитель в (16а) при $(r_0)_l$ либо множитель в (16б) при $(r_0)_r$ обращается в единицу, и схема совпадает со схемой направленных разностей.

Для каждой из трех приведенных схем возможны обобщения ее за счет привлечения неявной аппроксимации пространственной производной $\partial\varphi/\partial x$, позволяющие вести расчет при значениях $|r| > 1$. Два таких обобщения подсказываются самой структурой расчетной сетки. Одно ведет к более устойчивой численной схеме с полностью неявной аппроксимацией $\partial\varphi/\partial x$: по найденному значению r, искомое значение φ_0^1 рассчитывается в этом случае согласно выражению (14а,б). Другое обобщение комбинирует явную и неявную аппроксимацию $\partial\varphi/\partial x$. В этом случае величина φ_0^1 рассчитывается согласно (8а,б) в тех точках x_0, где $|r| \le 1$, и согласно (15а,б) – в тех точках, где $|r| > 1$. В явном варианте $|r| \le 1$ мы называем эту схему схемой (8а,б) условно, для краткости. В строгом смысле, это будет схемой (8а,б) только в том случае, если величина r дается выражениями (6а,б). Здесь же мы понимаем ее в более широком значении: φ_0^1 дается линейной комбинацией φ_{-1}^0 и φ_0^0 с весами r и (1-r) или комбинацией φ_1^0 и φ_0^0 с весами –r и (1+r). Поскольку при обоих подходах дискретное уравнение содержит, вообще говоря, значения φ^1 в более чем одной расчетной точке, решение не может быть найдено локально и требуется выполнение прогонки.

Для использования каких-либо из приведенных схем в прогностической модели необходимо еще рассмотреть их в частном случае уравнения квазилинейного переноса, который, в терминах уравнения (1), соответствует $\varphi \equiv u$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Действительно, даже при отсутствии орографических неоднородностей, механизм переноса каждого компонента скорости по соответствующей ему координате описывается оператором левой части уравнения (18). А в случае учета рельефа, перенос по вертикальной координате также и горизонтальных компонентов скорости (а не только вертикального) описывается с участием данного оператора.

Что дают вышеприведенные схемы применительно к уравнению (18)? Алгоритмически, применимость/неприменимость всех схем остается прежней. Но тем самым данный частный случай как раз иллюстрирует наличие вычислительных трудностей, не обнаруживаемых алгоритмической стороной дела и связанных с описанием нелинейных процессов.

В самом деле, поскольку мы предположили кусочно-линейное распределение начального поля u^0, даваемое (начнем со случая $u_0^0 > 0$) формулами (4а), (5а), решение уравнения (18) слева от точки x_0 на временном интервале (0, τ) может быть выписано аналитически. Общее решение уравнения (18):

$$u(t,x) = f(x - ut), \tag{19}$$

где вид функциональной зависимости определяется заданным начальным распределением u(0,x). В нашем случае, согласно (5а),

$$f(x) = u_0^0 + (x_0 - x)(u_{-1}^0 - u_0^0)/(x_0 - x_{-1}),$$

и решение (19) в этом конкретном случае превращается в

$$u = \frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}}(x - ut) - \frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}} x_0 + u_0^0;$$

$$u = \frac{u_0^0 + \dfrac{x_0 - x}{x_0 - x_{-1}}\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \dfrac{u_{-1}^0 - u_0^0}{x_0 - x_{-1}} t} = \frac{u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \left(r_{-1} - (r_0)_1\right)\dfrac{t}{\tau}}.$$

Таким образом, решение представляет собой начальное линейное распределение u_0^0, которое в течением времени как одно целое растет или затухает для δ_l положительного или отрицательного соответственно, см. (17). В частности, к концу шага, через время τ,

$$u^1 = \frac{u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \delta_l},$$

а искомое значение

$$u^1 = u_0^0 \big/ \left(1 - \delta_l\right). \tag{20а}$$

Аналогично, если $u_0^0 < 0$,

$$u_0^1 = u_0^0 \big/ \left(1 - \delta_r\right). \tag{20б}$$

Выражения (20а,б) указывают, в частности, что для квазилинейного переноса, при принятом кусочно-линейном профиле начального распределения точное решение к концу шага теряет смысл, если $\delta_l = 1$ (в случае $u_0^0 > 0$) или $\delta_r = 1$(если $u_0^0 < 0$). Тот факт, что расчет по схеме (16а,б) алгоритмически выполним и в этом случае, означает, что численное решение «уходит» от решения дифференциального уравнения, что также чревато, вообще говоря, развитием вычислительной неустойчивости и в любом случае нежелательно физически.

Ограничение $\delta_l < 1$ (как и $\delta_r < 1$) уже возникало выше в связи со схемой (6а,б). Приведем оценки (ниже мы воспользуемся ими еще в одной связи), указывающие, что в рассмотрении полного диапазона изменчивости δ_l (как и δ_r), $-\infty < \delta_l,\ \delta_r < \infty$, нет ни физической необходимости, ни физического смысла. Физически-осмысленные ситуации заведомо оперируют лишь небольшими значениями $|\delta_l|$ и $|\delta_r|$, а ситуации, отвечающие большим значениям этих параметров, физически нереалистичны или катастрофичны, и от расчетных формул в этих условиях естественно ожидать таких эффектов нелинейной неустойчивости, которые, в сколько-нибудь общей форме, аналитическими методами усмотрены быть не могут.

В самом деле, физически мотивированная и вычислительно реализуемая величина временного шага в локальном прогнозе $\tau \approx 300$ с. Далее, что касается горизонтальной адвекции, пространственный шаг сетки по горизонтальным координатам в нашей модели

$\Delta x = \Delta y = 10^4$ м (что отвечает, по порядку величины, общемировой практике для моделей локального прогноза). Отсюда, $|\delta_l|$ или $|\delta_r|$, равное 1, означает, что соответствующий горизонтальный компонент скорости меняется на расстоянии шага сетки на 33 м/с. Очевидно, таким образом, что не только ограничение $\delta_l < 1$ ($\delta_r < 1$) не будет фактическим ограничением при физически репрезентативном расчете, но оправдано и ограничение $\delta_l < 0.25$ ($\delta_r < 0.25$). Что касается вертикальной адвекции, единая оценка характерных значений δ_l, δ_r затруднена, т.к. вертикальный шаг расчетной сетки меняется с высотой от ~10 м у поверхности земли до ~1000 м в верхних слоях области прогноза. Но в среднем, величина $|\delta_l| = 1$ или $|\delta_r| = 1$ означает, что скорость вертикальной адвекции (в частности, если неоднородный рельеф отсутствует, - просто вертикальная скорость) меняется на 30 см/100 м, так что и в этом случае ограничение $|\delta_l|$ и $|\delta_r|$ величиной 0.5, и даже величиной 0.25, физически оправдано. Под ограничениями на величины δ_l и δ_r мы имеем в виду только соответствующие ограничения при восстановлении величины r, отвечающие той или иной схеме расчета адвекции, но не какое-либо изменение самого поля u^0, полученного в ходе выполнения предшествующего временного шага. Другими словами, при больших значениях $|\delta_l|$ или $|\delta_r|$ мы нарушаем равенства (17), но не меняем величины в правых частях этих неравенств.

Все вышеприведенные схемы вводились в прогностическую модель и испытывались в экспериментальных прогностических расчетах для Московского региона на срок 24 часа. Итоговая статистика влияния разных схем на качество прогноза к настоящему времени отсутствует. Но получены выводы, необходимые в практической работе с данными схемами. Приведем главные из них.

Нетрудно видеть, что с переходом от схемы направленных разностей (2а,б) к схеме (6а,б) область влияния схемы растет, если $\delta_l > 0$ ($\delta_r > 0$) и убывает, если $\delta_l < 0$ ($\delta_r < 0$) Для схемы же (16а,б) область влияния при $\delta_l > 0$ ($\delta_r > 0$) меньше, чем для схемы (6а,б), но по-прежнему больше, чем для схемы (2а,б), а при $\delta_l < 0$ ($\delta_r < 0$) больше, чем для схемы (6а,б), но по-прежнему меньше, чем для схемы (2а,б). Но большая область влияния схемы – при одном и том же расчетном шаблоне – означает больший «запас прочности» схемы в отношении ее устойчивости. Такой запас в нашем случае необходим при описании негладких нелинейных процессов для компенсации основного упрощающего предположения, лежащего в основе всех схем: на всем протяжении шага τ скорость адвекции определяется только ее распределением u^0 в начальный момент времени. Эти рассуждения приводят к предположению, что необходимым условием устойчивой работы и схемы (16а,б), и, в особенности, схемы (6а,б) должно быть ограничение на величины δ_l и δ_r при их отрицательных значениях. Это предположение подтверждается расчетами. Ограничение на отрицательные значения δ_l и δ_r (мы принимаем δ_l, $\delta_r \geq$-0.5 либо δ_l, $\delta_r \geq$-0.25) необходимо для устойчивости схем (6а,б) и (16а,б), а ограничение на положительные значения не необходимо. Тем не менее, с учетом вышеприведенного анализа квазилинейного переноса и оценок физической оправданности ограничений на величины $|\delta_l|$, $|\delta_r|$ окончательно мы принимали на обе величины ограничение $|\delta_l|$, $|\delta_r| \leq 0.5$.

В заключение приведем прогностическую иллюстрацию.

На рис.2 и 3 приведены объективный анализ поля температуры (^{0}C) для уровня 150 м (средняя высота Московского региона) за 00 МСВ 4 ноября 2001 г. и результат суточного прогноза на этот же срок: приземная температура, приведенная к уровню 150 м. Расчет горизонтальной адвекции выполнялся по явной схеме направленных разностей, (2а,б),

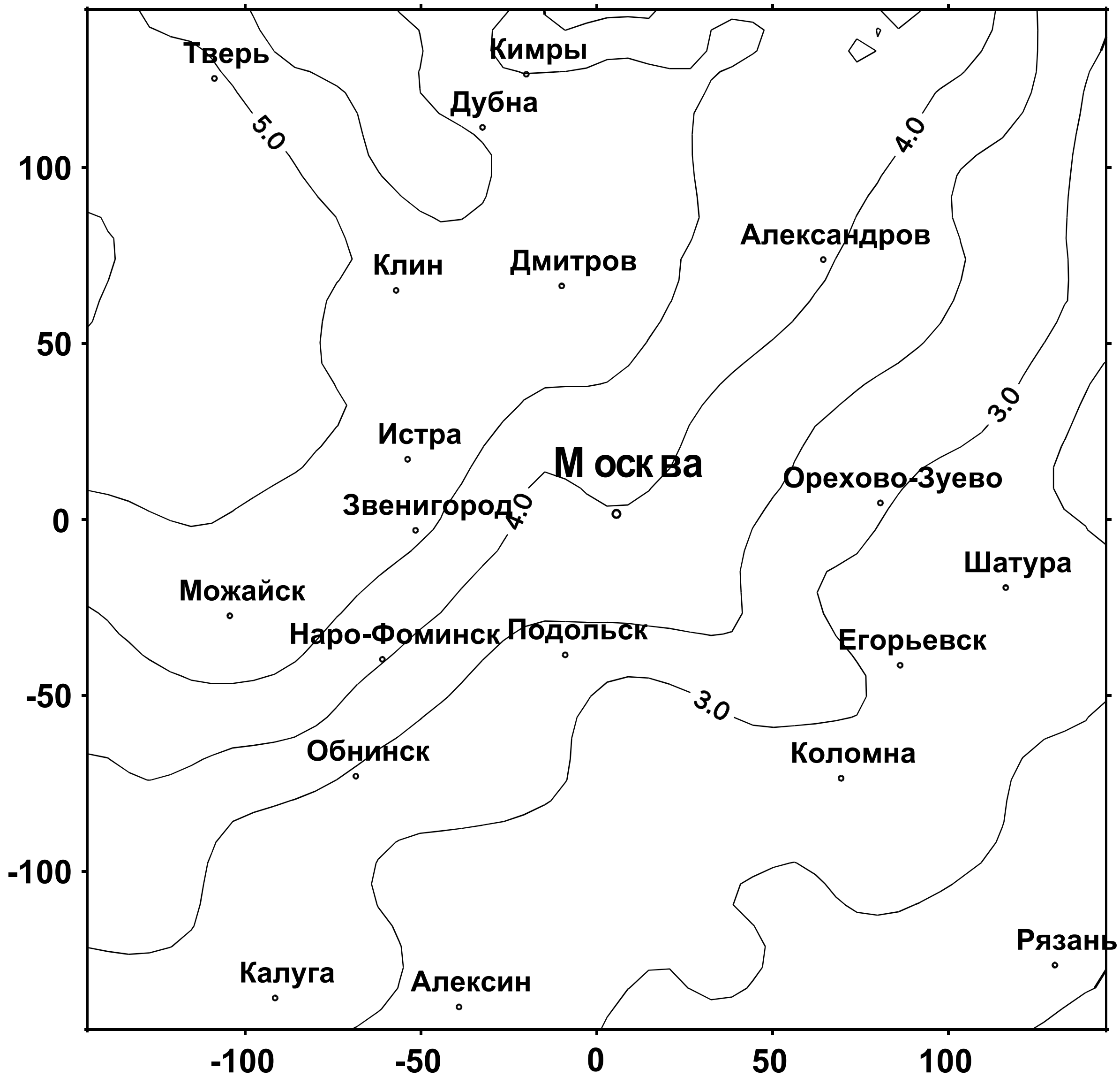

Рис. 2. Анализ температуры (^{0}C) на уровне 150 м для Московского региона за 00 МСВ 4 ноября 2001 г.

расчет вертикальной адвекции – также по схеме направленных разностей, но в неявной реализации (14а,б). На рис.4 приведен суточный прогноз того же поля на тот же срок, но с адвекцией, рассчитанной по уточненной схеме (16а,б): для горизонтальной адвекции – в явном варианте (расчетный шаг τ, как и в первом прогнозе, выбирался из условия $|r| \le 1$ по всей расчетной области), а для вертикальной адвекции – в явном/неявном варианте (8а,б), (15а,б).

Фактическое поле температуры (рис.2) характеризуется значениями в диапазоне от 2^0 до -5^0C и общим ростом температуры с востока на запад и с юга на север.

В прогнозируемых полях, в обоих вариантах, диапазон значений несколько шире фактического, главным образом за счет понижения нижней границы. На рис.3 границы этого диапазона равны 0.5^0 и -5.5^0C, а на рис.4 - 0^0 и $-4{,}5^0$C соответственно. В этом отношении два варианта прогноза близки. Однако в других отношениях они расходятся значительно. В варианте уточненного описания адвекции (рис.4) поле заметным образом более меандрировано, нежели на рис.3. Возможность описания более детальных образований за счет уточненного описания адвективного переноса – налицо. Также и общая ориентация поля на рис. 4 – иная, чем на рис. 3, ближе совпадающая с фактической. На рис. 3 температура в целом растет с севера на юг и с запада на восток, в противоречии с данными анализа (рис. 2), тогда как прогноз на рис. 4 верно отражает рост температуры с юга на север, а в западно-восточном направлении распределение в целом уравновешенное. К особенностям прогноза с уточненной схемой адвекции (рис. 4) относится выраженный температурный минимум в районе Наро-Фоминска/Обнинска, отсутствующий, правда, в данных анализа.

Таким образом, уточненное описание адвективного переноса – необходимый и заметный фактор в повышении детальности и точности гидродинамического локального прогноза.

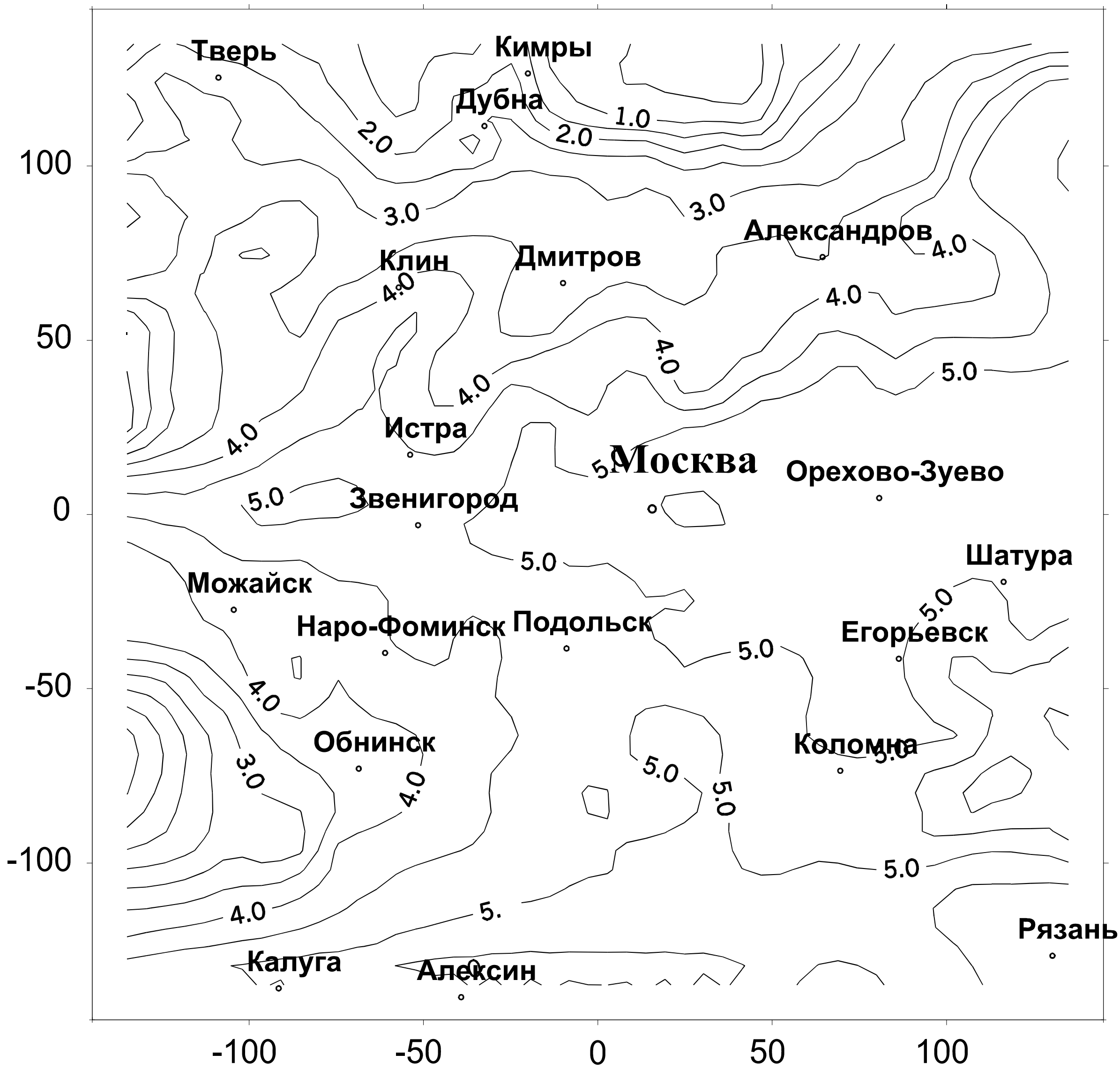

Рис. 3 .Суточный прогноз температуры (^{0}C) на уровне 150 м для Московского региона на 00 МСВ 4 ноября 2001 г. (расчет адвекции по схеме направленных разностей).

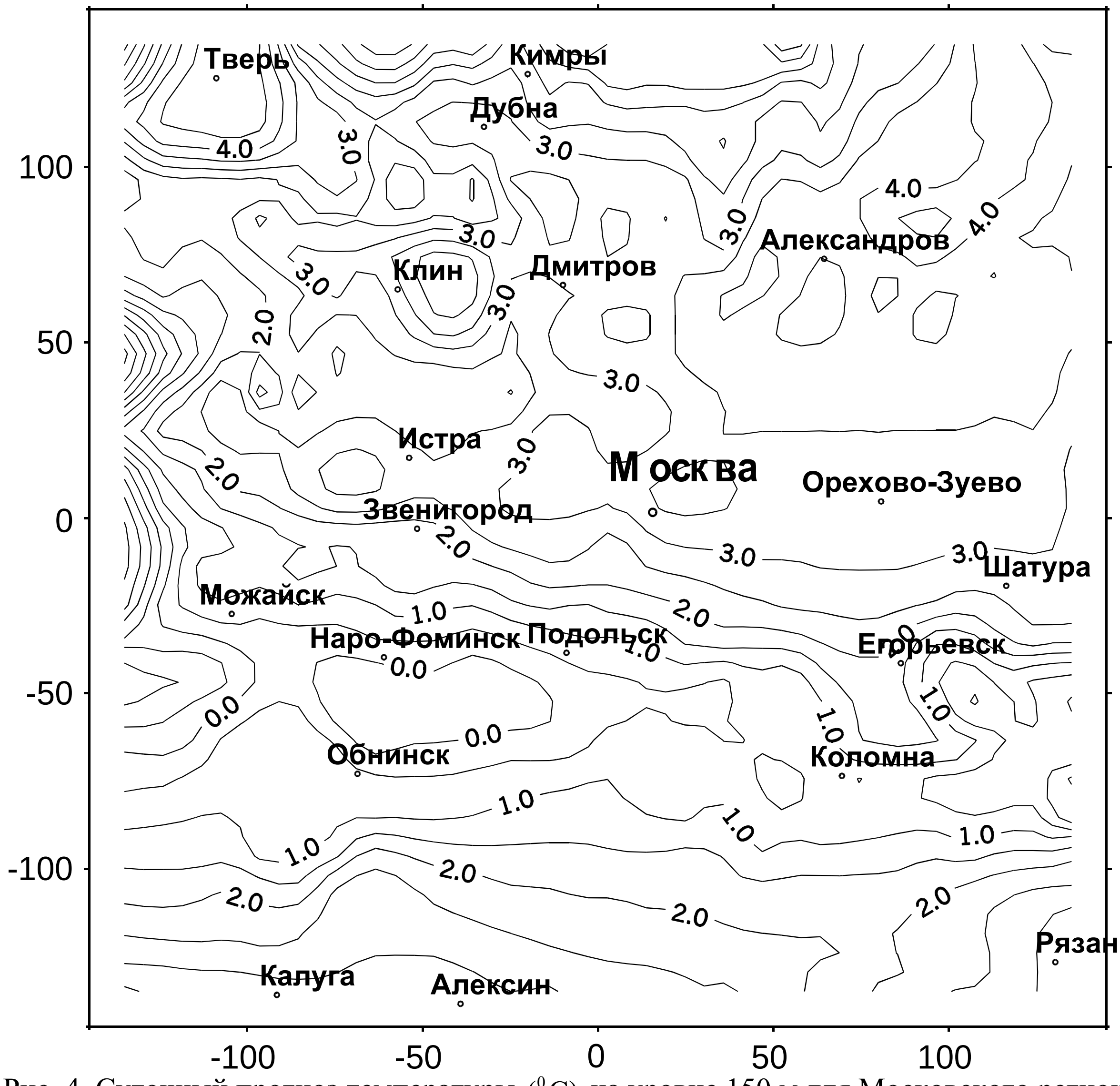

Рис. 4. Суточный прогноз температуры (^{0}C) на уровне 150 м для Московского региона на 00 МСВ 4 ноября 2001 г. (расчет адвекции по уточненной схеме).

УДК 551.509.32

Численные схемы для оператора адвекции в модели локального прогноза. Пекелис.Е.М.// Труды Гидрометцентра России, 2002, с.

Изложена методика построения численных схем, аппроксимирующих линейный (скорость переноса может зависеть от пространственных и временной координат) и квазилинейный операторы переноса. Полученные схемы представляют собой уточнения схемы «направленных разностей», учитывающие изменение скорости переноса в окрестности той точки, относительно которой выполняется дискретная аппроксимация дифференциального оператора. Приводятся примеры прогноза с использованием традиционной схемы направленных разностей и вновь полученных схем.

Ил.4.

Дубликат формул к статье Е.М.Пекелиса «Численные схемы для оператора адвекции в модели локального прогноза»

$$\partial\varphi/\partial t + u\cdot\partial\varphi/\partial x = 0. \qquad (1)$$

$$\frac{\varphi_0^1-\varphi_0^0}{\tau}+u_0^0\cdot\frac{\varphi_o^o-\varphi_{-1}^0}{x_0-x_{-1}}=0, \text{ если } u_0^0\ge 0;$$

$$\frac{\varphi_0^1-\varphi_0^0}{\tau}+u_0^0\cdot\frac{\varphi_1^o-\varphi_0^0}{x_1-x_0}=0, \text{ если } u_0^0\le 0.$$

$$\varphi_0^1=(1-(r_0)_l)\cdot\varphi_o^o+(r_0)_l\cdot\varphi_{-1}^0, \text{ если } (r_0)_l\ge 0; \qquad (2а)$$

$$\varphi_0^1=(1+(r_0)_r)\cdot\varphi_o^o-(r_0)_r\cdot\varphi_1^0, \text{ если } (r_0)_r\le 0. \qquad (2б)$$

$$(r_0)_l=\tau\cdot u_0^0/(x_o-x_{-1}),\ (r_0)_r=\tau\cdot u_0^0/(x_1-x_0), \qquad (3)$$

$$(r_0)_l\le 1, \text{ если } (r_0)_l\ge 0;$$

$$r=(x_0-x)/(x_o-x_{-1}),\ 0\le r\le 1. \qquad (4а)$$

$$u^0=u_0^0+(x_0-x)/(x_o-x_{-1})\cdot(u_{-1}^0-u_0^0)=u_0^0+r\cdot(u_{-1}^0-u_0^0). \qquad (5а)$$

$$r\cdot(x_o-x_{-1})=(u_0^0+r\cdot(u_{-1}^0-u_0^0))\cdot\tau$$

$$r=\frac{1}{1+(r_0)_l-r_{-1}}\cdot(r_0)_l, \qquad (6а)$$

$$r_{-1}=\tau\cdot u_{-1}^0/(x_o-x_{-1}). \qquad (7а)$$

$$\varphi^0=\varphi_0^0+r\cdot(\varphi_{-1}^0-\varphi_0^0)=r\cdot\varphi_{-1}^0+(1-r)\cdot\varphi_0^0,$$

$$\varphi_0^1=\frac{(r_0)_l}{1+(r_0)_l-r_{-1}}\cdot\varphi_{-1}^0+\frac{1-r_{-1}}{1+(r_0)_l-r_{-1}}\cdot\varphi_0^0. \qquad (8а)$$

$$\partial\varphi/\partial t\approx(\varphi_0^1-\varphi_0^0)/\tau,$$

$$\tau\cdot u\cdot\partial\varphi/\partial x\approx r\cdot(\varphi_0^0-\varphi_{-1}^0). \qquad (9а)$$

$$r=(x_0-x)/(x_1-x_0),\ -1\le r\le 0; \qquad (4б)$$

$$u^0=u_0^0+(x_0-x)/(x_1-x_0)\cdot(u_0^0-u_1^0)=u_0^0+r\cdot(u_0^0-u_1^0); \qquad (5б)$$

$$r=\frac{1}{1-(r_0)_r+r_1}\cdot(r_0)_r; \qquad (6б)$$

$$r_1=\tau\cdot u_1^0/(x_1-x_0); \qquad (7б)$$

$$\varphi_0^1=-\frac{(r_0)_r}{1-(r_0)_r+r_1}\cdot\varphi_1^0+\frac{1+r_{-1}}{1-(r_0)_r+r_1}\cdot\varphi_0^0; \qquad (8б)$$

$$\tau\cdot u\cdot\partial\varphi/\partial x\approx r\cdot(\varphi_1^0-\varphi_0^0). \qquad (9б)$$

$$r_{-1}\le 1, \qquad (11а)$$

$$\left|\varphi_0^1\right|\le\max\left\{\left|\varphi_0^0\right|,\left|\varphi_{-1}^0\right|\right\}.$$

$$\left|r_1\right|\le 1, \qquad (11б)$$

$$\left|\varphi_0^1\right|\le\max\left\{\left|\varphi_0^0\right|,\left|\varphi_1^0\right|\right\}.$$

$$\left|\tau\cdot u_k^0/(x_k - x_{k-1})\right| \le 1,\ \left|\tau\cdot u_k^0/(x_{k+1} - x_{k})\right| \le 1, \tag{12}$$

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{1+(r_0)_1 - r_{-1}}\cdot(r_0)_1 & \text{если}\cdot r_{-1}\le 1, \\ r_{-1} & \text{если}\cdot r_{-1} > 1, \end{cases} \tag{13а}$$

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{1-(r_0)_r + r_1}\cdot(r_0)_r & \text{если}\cdot r_{-1}\le 1, \\ r_1 & \text{если}\cdot r_{-1} > 1. \end{cases} \tag{13б}$$

$$\varphi_0^1 = \frac{1}{1+r}\cdot\varphi_0^0 + \frac{r}{1+r}\cdot\varphi_{-1}^1, \tag{14а}$$

$$\varphi_0^1 = \frac{1}{1-r}\cdot\varphi_0^0 - \frac{r}{1-r}\cdot\varphi_1^1, \tag{14б}$$

$$\varphi_0^1 = \varphi(H) = \frac{1}{r}\varphi_{-1}^0 + \frac{r-1}{r}\varphi_{-1}^1, \tag{15а}$$

$$\tau u(\partial\varphi/\partial x) \sim \varphi_0^0 - \varphi_{-1}^0 + (r-1)(\varphi_0^1 - \varphi_{-1}^1),$$

$$\varphi_0^1 = -\frac{1}{r}\varphi_1^0 + \frac{r+1}{r}\varphi_1^1, \tag{15б}$$

$$\tau u(\partial\varphi/\partial x) \sim -(\varphi_1^0 - \varphi_0^0) + (r+1)(\varphi_1^1 - \varphi_0^1),$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{x_0 - x_1}\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{x_0 - x_1}u^0 = -\frac{1}{x_0 - x_{-1}}\left[u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)\right].$$

$$\frac{dr}{dt} + \frac{u_{-1}^0 - u_0^0}{x_0 - x_{-1}}r = -\frac{u_0^0}{x_0 - x_{-1}},$$

$$r(t) = C\cdot\exp\left(\frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}}t\right) + \frac{u_0^0}{u_0^0 - u_{-1}^0} = C\cdot\exp\left[\left((r_0)_1 - r_{-1}\right)\frac{t}{\tau}\right] + \frac{(r_0)_1}{(r_0)_1 - r_{-1}}.$$

$$r(t) = \frac{(r_0)_1}{r_{-1} - (r_0)_1}\cdot\left\{\exp\left[\left(r_{-1} - (r_0)_1\right)\left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right] - 1\right\}.$$

$$r = \frac{\exp\left(r_{-1} - (r_0)_1\right) - 1}{r_{-1} - (r_0)_1}(r_0)_1,\ \ (r_0)_1 > 0. \tag{16а}$$

$$r = \frac{\exp\left((r_0)_r - r_1\right) - 1}{(r_0)_r - r_1}(r_0)_r,\ (r_0)_r < 0. \tag{16б}$$

$$\delta_1 = r_{-1} - (r_0)_1,\ \delta_r = (r_0)_r - r_1, \tag{17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

$$u(t,x) = f(x - ut), \tag{19}$$

$$f(x) = u_0^0 + (x_0 - x)(u_{-1}^0 - u_0^0)/(x_0 - x_{-1}),$$

$$u = \frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}}(x - ut) - \frac{u_0^0 - u_{-1}^0}{x_0 - x_{-1}}x_0 + u_0^0;$$

$$u = \frac{u_0^0 + \dfrac{x_0 - x}{x_0 - x_{-1}}\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \dfrac{u_{-1}^0 - u_0^0}{x_0 - x_{-1}} t} = \frac{u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \left(r_{-1} - (r_0)_1\right)\dfrac{t}{\tau}}.$$

$$u^1 = \frac{u_0^0 + r\left(u_{-1}^0 - u_0^0\right)}{1 - \delta_1},$$

$$u^1 = u_0^0 \Big/ \left(1 - \delta_1\right). \tag{20a}$$