

УДК 551.509.314

Расчет компонент скорости ветра в бароклинической атмосфере

В.И. Цветков

*Гидрометеорологический научно-исследовательский центр
Российской Федерации, г. Москва, Россия
tsvetkov@mecom.ru*

Разработан алгоритм приспособления крупномасштабного поля ветра к орографии, заданной на мелкой сетке. (Здесь под крупномасштабными полями понимаются и поля региональных моделей, так как они тоже требуют уточнения). Подобный алгоритм был сформулирован и реализован в Гидрометцентре России А.И. Важником, существенно более экономичный по сравнению с мезомасштабными гидродинамическими моделями. В основе этого алгоритма адаптации лежит поиск ближайшего к исходному потоку поля ветра, удовлетворяющего условиям бездивергентности и равенства нулю составляющей скорости ветра, нормальной к поверхности орографии.

Предлагаемый метод базируется на основе важного свойства бароклинических жидкостей (ортогональность барического градиента своему вихрю). Получены формулы для расчета компонент вектора скорости в атмосфере (в том числе и вертикальной скорости).

Ключевые слова: динамический градиент, турбулизирующий вектор, бароклиническая жидкость, базис, квазивертикаль, квазигоризонталь, p -система координат, адаптация

Calculation of wind speed components in the baroclinic atmosphere

V.I. Tsvetkov

*Hydrometeorological Research Center of Russian Federation, Moscow, Russia
tsvetkov@mecom.ru*

An algorithm is developed for adapting a large-scale wind field to the orography specified on a fine grid. (Here, the fields of regional models are also understood as large-scale fields, since they also require correction). A similar algorithm was formulated and implemented at the Hydrometeorological Center of the Russian Federation by A.I. Vazhnik and is much more cost-effective as compared with mesoscale hydrodynamic models. This adaptation algorithm is based on the search for the closest wind field to the initial flow which satisfies the conditions of divergence absence and equality to zero of the wind speed component normal to the orographic surface.

The proposed method is based on the important property of baroclinic fluids (orthogonality of the pressure gradient to its vortex). The formulas for calculating the components of the velocity vector in the atmosphere (including the vertical velocity) are derived.

Keywords: dynamic gradient, turbulizing vector, baroclinic fluid, basis, quasivertical, quasihorizontal, p -coordinate system, adaptation

Введение

В атмосфере постоянно наблюдаются движения воздуха, весьма различные по интенсивности и пространству. Непосредственной причиной атмосферных движений служит неравномерность распределения давления, обусловленная процессами теплообмена. Движение воздуха непрерывно: он поднимается (восходящее движение), опускается (нисходящее движение) и перемещается в горизонтальном направлении (ветер).

Поэтому одной из причин, вызывающая образования ветра – разница атмосферного давления. Ветер дует из области более высокого атмосферного давления, в область с более низким. Чем больше разница в атмосферном давлении, тем сильнее ветер. Распределение атмосферного давления на Земле определяет направление ветров, господствующих в тропосфере на разных широтах.

Например, от тропических широт – поясов повышенного давления в каждом полушарии воздух направляется с одной стороны к экватору, с другой – к умеренным широтам. При этом он отклоняется вправо в северном и влево в Южном полушарии. Между тропиками и экватором дуют пассаты, они имеют северо-восточное направление в северном полушарии и юго-восточное в южном. Воздух, направляющийся от тропических широт в умеренные, отклоняется к востоку. Поэтому в умеренных широтах господствуют западные ветры – западный перенос воздуха. Из высоких широт в умеренные дуют ветры с преобладанием восточной составляющей.

На границах материков и океанов ветры зимой дуют с материка на океан, а летом, наоборот, с океана на материк – это муссоны. Муссонные ветры особенно хорошо выражены в умеренных широтах, где разница между температурой зимы и лета особенно велика. В зависимости от местных условий (рельеф, растительность, водоемы) возникают различные местные ветры.

Вертикальные движения в атмосфере обуславливаются различными причинами – архимедовой силой плавучести, конвективными явлениями, влиянием орографии и другими факторами. Пространственно-временное разрешение атмосферных моделей позволяет описать упорядоченные вертикальные движения, охватывающие области, сравнимые с размерами циклонов и антициклонов. Из-за отсутствия инструментальных данных о скоростях вертикальных движений единственным путем их определения является расчет с использованием уравнений гидротермодинамики атмосферы.

Развитие моделей атмосферы в настоящее время достигло как подробного описания физических процессов в атмосфере, так и высокого пространственного разрешения (вплоть до нескольких километров в ведущих метеорологических центрах). Однако возникают практические задачи, которые могут требовать еще более детального пространственного разрешения. Кроме того, некоторые прикладные задачи должны быть

решены в кратчайшие сроки (например, детальный прогноз ветра при аварийном выбросе загрязнения в атмосферу). Но чем подробнее модель описывает физические процессы, тем больше машинного времени требуется для интегрирования такой модели. Очевидно, что неоспоримую практическую ценность представлял бы метод, позволяющий за короткое время получить детальный расчет какого-либо метеозлемента.

Таким образом, возникает задача разработки алгоритма приспособления крупномасштабного поля ветра к орографии, заданной на мелкой сетке. (Здесь под крупномасштабными полями понимаются и поля региональных моделей, так как они тоже требуют уточнения). Подобный алгоритм был сформулирован и реализован в Гидрометцентре России А.И. Важником, существенно более экономичный по сравнению с мезомасштабными гидродинамическими моделями. В основе этого алгоритма адаптации лежит поиск ближайшего к исходному потоку поля ветра, удовлетворяющего условиям бездивергентности и равенства нулю составляющей скорости ветра, нормальной к поверхности орографии [1].

Предлагаемый метод базируется на основе важного свойства бароклинных жидкостей (ортогональность барического градиента своему вихрю). Получены формулы для расчета компонент вектора скорости в атмосфере (в том числе и вертикальной скорости).

Постановка задачи

Атмосферу рассмотрим, как жидкость, состоящую из совокупности частиц, непрерывно заполняющих пространство. Частицы эти действуют друг на друга, отчего возникают внутренние силы, выражающиеся при посредстве давления жидкости [5]. Следовательно, задача изучения движения атмосферы состоит из двух частей.

1. Определение движения атмосферы \rightarrow определения вектора скорости \mathbf{V} в зависимости от времени и координат того места в атмосфере, к которому скорость относиться.

2. Определение внутренних сил (т. е. давления), возникающих при данных обстоятельствах динамической задачи.

В данной работе рассмотрим решение первой части, т. е. определение вектора скорости \mathbf{V} .

Назовем *кинематическими элементами* движения компоненты скорости \mathbf{V} , их производные по времени и координатам, а также и различные функции этих величин. *Динамическими элементами* движения будем называть давление, плотность, температуру, их производные по времени и координатам, а также различные функции этих величин [5].

Введем следующие обозначения:

t – время; p – давление; ρ – плотность; T – температура;
 $\boldsymbol{\tau}$ – вектор угловой скорости вращения Земли вокруг своей оси;
 \mathbf{K} – ускорение силы тяжести; $\mathbf{G} = \frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p$, $\Phi = \mathbf{grad} \ln \rho$, $\mathbf{M} = \mathbf{grad} T$,

\mathbf{F} – неконсервативные силы (в приложениях гидромеханики сжимаемой жидкости эти силы встречаются сравнительно редко [7]).

(\mathbf{A}, \mathbf{B}) – скалярное произведение векторов; $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ – векторное произведение; A_ϕ, A_θ, A_z – проекция вектора \mathbf{A} на соответствующие координатные оси;

$$\mathbf{H} = [\mathbf{G}, \mathbf{\Phi}];$$

$$(H_\psi = G_z \Phi_\theta - G_\theta \Phi_z, H_\theta = G_\psi \Phi_z - G_z \Phi_\psi, H_z = G_\theta \Phi_\psi - G_\psi \Phi_\theta).$$

Остальные обозначения общепринятые.

Запишем уравнения гидродинамики в векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} = -\mathbf{G} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}] + \mathbf{K} + \mathbf{F}.$$

Преобразуем эти уравнения:

$$\mathbf{G} = \mathbf{K} + \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}].$$

Первый (\mathbf{G}) вектор называется динамическим градиентом.

Второй вектор $(\mathbf{K} + \mathbf{F} - \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}])$, с учетом его роли в

образовании вихрей, называется турбулизирующим вектором.

Так как $\text{grad } p = 0$, следовательно $\text{rot } \mathbf{G} = -\mathbf{H}$. Легко видеть, что

$$\mathbf{H} = \text{rot} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} - \mathbf{K} - \mathbf{F} + 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}] \right).$$

Следовательно, турбулизирующий вектор \mathbf{H} может быть выражен, с одной стороны, через скорость, а с другой, – через динамический градиент и градиент плотности. Отсюда вытекает так называемое условие незакручиваемости для бароклинной жидкости [7]: $(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = 0$, т. е. турбулизирующий вектор ортогонален динамическому градиенту.

Исходя из определения турбулизирующего вектора видно, что вектора \mathbf{H} , \mathbf{G} , $\mathbf{\Phi}$ не компланарны. Следовательно, их можно использовать как базис. Поэтому представим вектор \mathbf{V} в виде разложения по этому базису:

$$\mathbf{V} = \alpha \mathbf{H} + \beta \mathbf{G} + \gamma \mathbf{\Phi}.$$

Запишем уравнение гидродинамики в форме Громеко:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}{2} - [\mathbf{V}, \text{rot} \mathbf{V}] - \mathbf{F} = -\mathbf{G} + \mathbf{K} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}].$$

Рассмотрим вектор

$$\mathbf{W} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}{2} - [\mathbf{V}, \text{rot} \mathbf{V}] - \mathbf{F}.$$

На основе масштабного анализа определено, что векторы \mathbf{G} , $\mathbf{\Phi}$ – квазивертикальны, а векторы \mathbf{H} , \mathbf{V} , \mathbf{F} , \mathbf{W} – квазигоризонтальны.

Введем обозначения:

$$\mu = (\mathbf{V}, \mathbf{G}), \quad \nu = (\mathbf{V}, \mathbf{\Phi}), \quad \xi = (\mathbf{V}, \mathbf{M}).$$

Легко видеть

$$\begin{aligned}\mu &= \beta(\mathbf{G}, \mathbf{G}) + \gamma(\mathbf{G}, \Phi), \\ \nu &= \beta(\mathbf{G}, \Phi) + \gamma(\Phi, \Phi), \\ \xi &= \beta(\mathbf{G}, \mathbf{M}) + \gamma(\mathbf{G}, \mathbf{M}).\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\beta = \frac{\mu(\Phi, \Phi) - \nu(\mathbf{G}, \Phi)}{(\mathbf{H}, \mathbf{H})}; \quad \gamma = \frac{\nu(\mathbf{G}, \mathbf{G}) - \mu(\mathbf{G}, \Phi)}{(\mathbf{H}, \mathbf{H})};$$

$$p = R\rho T \Leftrightarrow \mathbf{G} = R\mathbf{M} + RT\Phi \Leftrightarrow \mu = RT\nu + R\xi.$$

В p -системе координат рассматриваемые векторы имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_p} + \frac{G_x}{RT} \frac{\partial}{\partial \ln p}; \quad T = -\frac{g}{R} \frac{\partial Z}{\partial \ln p};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_p} + \frac{G_y}{RT} \frac{\partial}{\partial \ln p}; \quad \mathbf{H} = [\mathbf{G}, \Phi] = R[\mathbf{M}, \Phi];$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{g}{RT} \frac{\partial}{\partial \ln p}; \quad G_t = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t}; \quad M_t = \frac{\partial T}{\partial t}; \quad \Phi_t = \frac{\partial \ln \rho}{\partial t}.$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_p} + \frac{g}{RT} \frac{\partial Z}{\partial t_p} \frac{\partial}{\partial \ln p}.$$

$$G_x = g \frac{\partial Z}{\partial x_p}; \quad M_x = \frac{\partial T}{\partial x_p} - \frac{M_z G_x}{g}; \quad \Phi_x = \frac{G_x - RM_x}{RT};$$

$$G_y = g \frac{\partial Z}{\partial y_p}; \quad M_y = \frac{\partial T}{\partial y_p} - \frac{M_z G_y}{g}; \quad \Phi_y = \frac{G_y - RM_y}{RT};$$

$$G_z = -g \equiv const; \quad M_z = -\frac{g}{RT} \frac{\partial T}{\partial \ln p}; \quad \Phi_z = \frac{G_z - RM_z}{RT};$$

$$G_t = g \frac{\partial Z}{\partial t_p}; \quad M_t = \frac{\partial T}{\partial t_p} - M_z \frac{\partial Z}{\partial t_p}; \quad \Phi_t = \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial t_p} - \Phi_z \frac{\partial Z}{\partial t_p}$$

На основе масштабного анализа [5] получаем следующие соотношения:

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{(\mathbf{V}, \mathbf{V})}{2} - [\mathbf{V}, \text{rot} \mathbf{V}] - \mathbf{F} \right\rangle \cong 0 \Rightarrow -\mathbf{G} + \mathbf{K} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}] = 0;$$

$$-\mathbf{G} + \mathbf{K} - 2[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}] = 0 \rightarrow -\mu + G_z w = 0 \rightarrow \frac{\mu \Phi_z - \nu G_z}{(\mathbf{H}, \mathbf{H})} (G_x H_y - G_y H_x) = \alpha H_z$$

Следовательно, векторное выражение для скорости \mathbf{V} можно записать в виде:

$$\mathbf{V} = \alpha \mathbf{H} + a \mathbf{H}_1; \quad [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{H}] \cong \begin{vmatrix} \tau_z H_y \\ -\tau_z H_x \\ \tau_y H_x \end{vmatrix}; \quad [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{H}_1] \cong \begin{vmatrix} -\tau_z H_x \\ -\tau_z H_y \\ \tau_y H_y \end{vmatrix},$$

$$\text{где } \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{pmatrix}; \mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} H_y \\ -H_x \\ \frac{\mu}{G_z} - \frac{\mu\Phi_z - \nu G_z}{(\mathbf{H}, \mathbf{H})} (G_x H_y - G_y H_x) \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \frac{\mu\Phi_z - \nu G_z}{(\mathbf{H}, \mathbf{H})}.$$

Используя выведенные соотношения, получаем

$$\alpha G_z H_z = \mathbf{a} (G_x H_y - G_y H_x).$$

Введем, следующие вектора:

$$\mathbf{H}^* = \begin{pmatrix} \tau_z H_y \\ -\tau_z H_x \\ \tau_y H_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_1 \tau_y H_x \\ \alpha_1 \tau_y H_y \\ \alpha_2 \tau_y \end{pmatrix}; \mathbf{H}_1^* = \begin{pmatrix} -\tau_z H_x \\ -\tau_z H_y \\ \tau_y H_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \tau_y H_y \\ \mathbf{a}_1 \tau_y H_x \\ \mathbf{a}_2 \tau_y \end{pmatrix}.$$

С помощью этих векторов, получаем систему уравнений

$$-(\mathbf{H}^*, \mathbf{G} - \mathbf{K}) - 2(\mathbf{H}^*, [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}]) = 0;$$

$$-(\mathbf{H}_1^*, \mathbf{G} - \mathbf{K}) - 2(\mathbf{H}_1^*, [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{V}]) = 0;$$

$$2(H_x^2 + H_y^2)(\tau_z^2 (G_x H_y - G_y H_x) - \tau_y^2 G_y (\alpha_2 + H_x) - \tau_z \tau_y \alpha_1 G_z H_z) \equiv \Delta_1;$$

$$2(H_x^2 + H_y^2)(\tau_z^2 G_z H_z - \tau_y^2 G_y (\mathbf{a}_2 + H_y) + \tau_z \tau_y \mathbf{a}_1 (G_x H_y - G_y H_x)) \equiv \Delta_2$$

$$-(G_x H_y - G_y H_x) \tau_z + \alpha_1 G_z H_z \tau_y \equiv f_1;$$

$$-G_z H_z \tau_z - \mathbf{a}_1 (G_x H_y - G_y H_x) \tau_y \equiv f_2$$

Пусть

$$\alpha_1 = -\text{sign}(\tau_z (G_x H_y - G_y H_x) G_z H_z);$$

$$\alpha_2 = -H_x - q \frac{(G_x H_y - G_y H_x)}{G_y};$$

$$\mathbf{a}_1 = \text{sign}(\tau_z (G_x H_y - G_y H_x) G_z H_z);$$

$$\mathbf{a}_2 = -H_y - q \frac{G_z H_z}{G_y};$$

$$\Delta_1^* = 2(G_x H_y - G_y H_x)(H_x^2 + H_y^2) \left(\tau_z^2 + q \tau_y^2 + \left| \tau_z \tau_y \frac{G_z H_z}{(G_x H_y - G_y H_x)} \right| \right);$$

$$\Delta_2^* = 2G_z H_z (H_x^2 + H_y^2) \left(\tau_z^2 + q \tau_y^2 + \left| \tau_z \tau_y \frac{(G_x H_y - G_y H_x)}{G_z H_z} \right| \right)$$

Если $G_z H_z \geq (G_x H_y - G_y H_x)$, то

$$a = \frac{f_2}{2(H_x^2 + H_y^2) \left(\tau_z^2 + q\tau_y^2 + \left| \tau_z \tau_y \frac{(G_x H_y - G_y H_x)}{G_z H_z} \right| \right)},$$

$$\alpha = a \frac{(G_x H_y - G_y H_x)}{G_z H_z};$$

Если $G_z H_z < (G_x H_y - G_y H_x)$, то

$$\alpha = \frac{f_1}{2(H_x^2 + H_y^2) \left(\tau_z^2 + q\tau_y^2 + \left| \tau_z \tau_y \frac{G_z H_z}{(G_x H_y - G_y H_x)} \right| \right)},$$

$$a = \alpha \frac{G_z H_z}{(G_x H_y - G_y H_x)},$$

Итак, мы имеем данные о компонентах вектора скорости (u , v , w) на каких-то уровнях в атмосфере. Эти уровни, вообще говоря, могут не совпадать с расчетными уровнями программы адаптации (приспособления) крупномасштабного поля ветра к орографии, на которых должна быть задана начальная информация. Дело в том, что расчетные уровни программы адаптации определяются (из соображений сходимости итерационного процесса, заложенного в адаптации) шагом горизонтальной расчетной сетки. Кроме того, может не совпадать и вертикальная система координат (для адаптации это должны быть z -уровни). Очевидно, что для известных уже значений u , v , w необходимо применить процедуру интерполяции на расчетные уровни, заданные в адаптации. Для интерполяции предлагается произвести разложение полей метеоэлементов по вертикали в ряд Фурье по ортогональным полиномам Чебышева – Лагерра [2–4, 6].

Таким образом, коэффициенты для расчета вектора скорости определены.

Рассмотренный алгоритм был реализован в виде программы для ЭВМ на языке FORTRAN.

Численные эксперименты по восстановлению вектора скорости

Рассмотрим результаты численных экспериментов с разработанным методом вычисления компонент скорости в атмосфере. Численные эксперименты проводились на основе глобальной спектральной модели Гидрометцентра России с архивными данными (ЕСОА) за 1996 год.

На рис. 1–3 представлены начальные поля горизонтальных компонент u , v вычисленные по разработанному алгоритму на АТ-850 и АТ-200 и реальные поля этих компонент.

Для удобства поля показаны в градациях, причем совмещенных попарно.

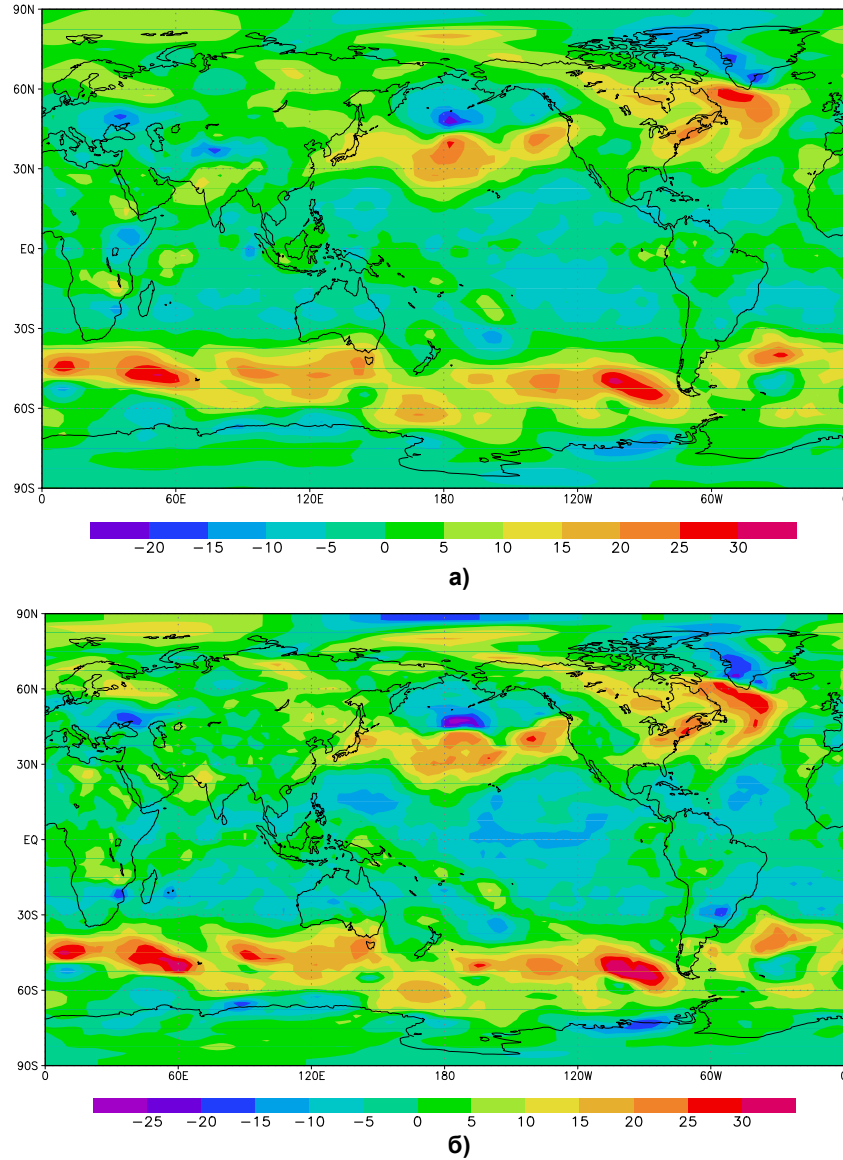


Рис. 1. Поля горизонтальных компонент u на AT-850 (ЕСОА 15.01.1996) вычисленные (а), реальные (б).

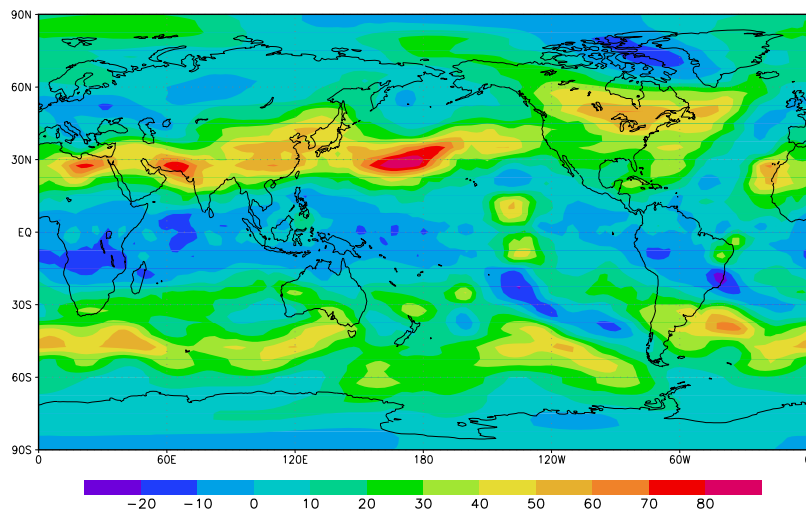
Fig. 1. Fields of horizontal components u on AT-850 calculated (a) and real (b).

На рис. 4 представлен ход среднеквадратичной ошибки прогноза геопотенциала для AT-850 на трое суток для Северного полушария.

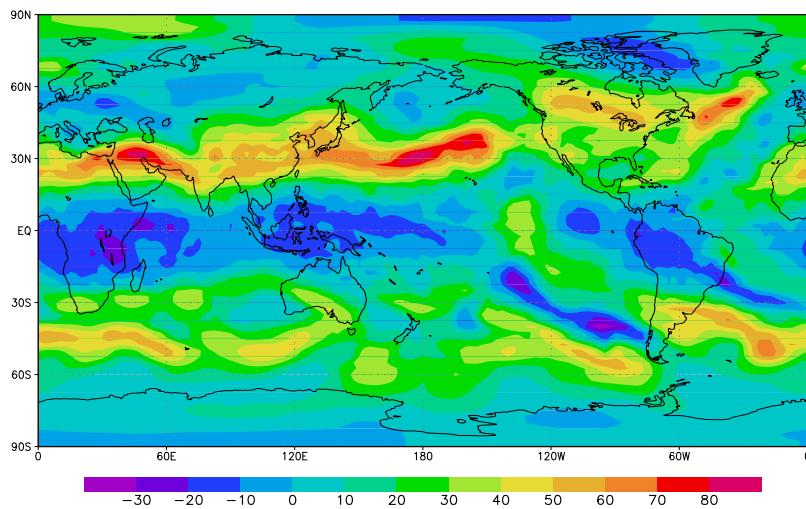
Среднеквадратичная ошибка SS прогноза вычислялась по формуле:

$$SS = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (Z_t^f + Z_0^r)^2}{\sum_{t=1}^N (Z_t^r + Z_0^r)^2},$$

где SS – относительная среднеквадратическая ошибка;



а)



б)

Рис. 2. Поля горизонтальных компонент u на AT-200 (ЕСОА 15.01.1996) вычисленные (а), реальные (б).

Fig. 2. Fields of horizontal components u on AT-200 calculated (a) and real (б).

Z_t^f – прогнозируемое значение метеорологического элемента;
 Z_0^r – значение метеорологического элемента в начальный момент времени;
 Z_t^r – соответствующее наблюдаемое значение метеорологического элемента.

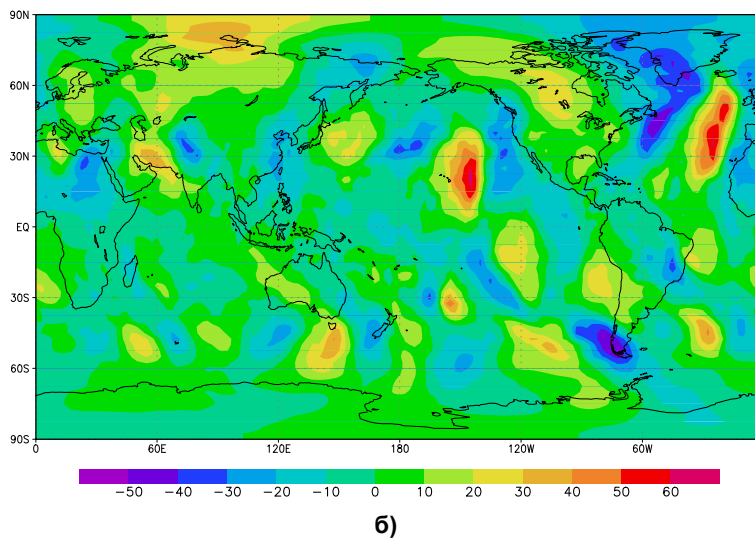
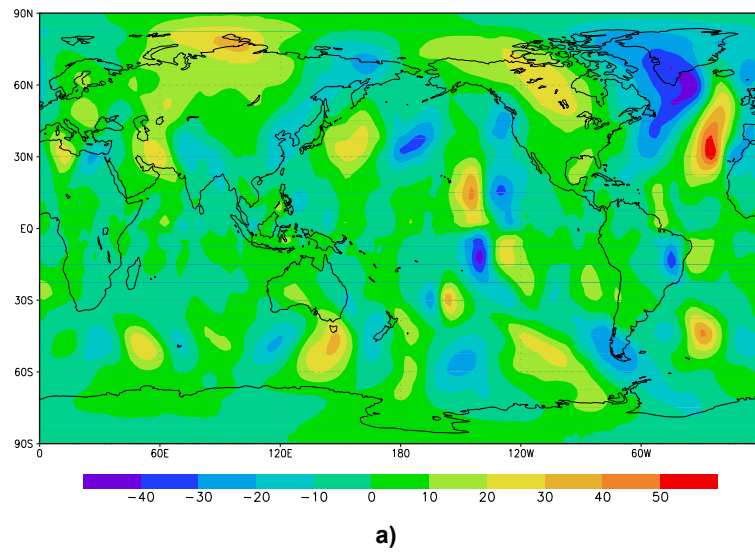


Рис. 3. Поля горизонтальных компонент v на AT-200 (ЕСОА 15.01.1996) вычисленные (а), реальные (б).

Fig. 3. Fields of horizontal components V on AT-200 calculated (a) and real (б).

Прогноз осуществлялся как с реальными значениями скорости ветра (ряд 1), так и с вычисленными значениями скоростей (ряд 2) (реальные данные ЕСОА)

Сравнение и анализ этих рисунков иллюстрирует качество расчета компонент скорости по динамическим элементам.

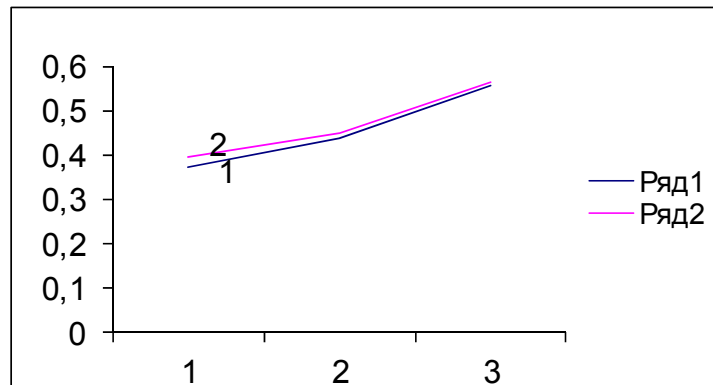


Рис. 4. Относительная среднеквадратичная ошибка геопотенциала на АТ-850 по прогнозу на 3 суток: Ряд 1 – u, v реальные, Ряд 2 – u, v вычисленные.

Fig. 4. Relative root-mean-square error geopotential at AT-850 according to the forecast for 3 days.

Список литературы

1. *Важник А.И.* Численная схема трехмерной адаптации крупномасштабного потока (циркуляции) к локальным особенностям рельефа // *Метеорология и гидрология*. 2003. № 5. С. 24-30.
2. *Гобсон Е.В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: ИЛ, 1952. 476 с.
3. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Минск: Наука и техника, 1983. 287 с.
4. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1976. 328 с.
6. *Фролов А.В., Цветков В.И.* О гармоническом анализе действительных функций на сфере // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2004. Т. 44, № 11. С. 1964-1971.
7. *Фридман А.А.* Избранные труды // Под ред. Л.С. Полака. М.: Наука, 1966. 462 с. (Классики науки / АН СССР).
8. *Robert A.J.* An integration of the primitive meteorological equations in terms of spherical harmonics // *Динамика крупномасштабных атмосферных процессов*. М.: Наука, 1965. С. 66-69.

References

1. *Vazhnik A. I.* Numerical Scheme of Three-Dimensional Adaptation of Large-Scale Flow (Circulation) to Local Orography. *Russ. Meteorol. Hydrol.*, 2003, no. 5, pp. 16-21.
2. *Gobson E.V.* Teoriya sfericheskikh i ehllipsoidal'nykh funktsiy. Moscow, IL, 1952. 476 p.

3. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrny P.I. Nachala teorii vychislitel'nykh metodov. Interpolirovanie i integrirovaniye. Minsk, Nauka i tekhnika publ., 1983, 287 p. [in Russ.].
4. Szegő G. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society, New York, 1939, vol. 23, pp. 10+401.
5. Suetin P.K. Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny. Moscow, Fizmatgiz publ., 1976, 328 p. [in Russ.].
6. Frolov A.V., Tsvetkov V.I. On the harmonic analysis of functions of a real variable on a sphere. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2004, vol. 44, no. 11, pp. 1867–1874.
7. Fridman A.A. Izbrannyye Trudy. Moscow, Nauka publ., 1966, 462 p.
8. Robert A.J. An integration of the primitive meteorological equations in terms of spherical harmonics. *Dinamika krupnomasshtabnykh atmosferykh protsessov*, Moscow, Nauka publ., 1965, pp. 66-69.

Поступила в редакцию 04.10.2018 г.
Received by the editor 04.10.2018.