

DOI: <https://doi.org/10.37162/2618-9631-2023-2-128-137>

УДК 551.513

Решение задачи гашения свободных колебаний урвенной поверхности воды в Финском заливе

В.В. Клёмин, О.А. Королёва

*Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург, Россия*

Предлагаемая статья является третьей в серии статей авторов из Военно-Космической Академии им. А.Ф. Можайского, опубликованных в журнале «Гидрометеорологические исследования и прогнозы» (№1 (371) 2019; №2 (380), 2021). В этих статьях продемонстрировано применение математических методов оптимизации, от классического вариационного исчисления до современных методов Понтрягина и метода моментов, для решения конкретных задач управления природными процессами.

В данной статье для прогноза штормового нагона в Финском заливе выбрана система уравнений, которая, как показали расчеты по данным наблюдений, позволяет прогнозировать максимальный уровень подъема воды в устье реки Нева с погрешностью, не превышающей 10 %. Предложен алгоритм решения задачи гашения свободных колебаний урвенной поверхности воды в Финском заливе. Представлены результаты расчетов управляющих воздействий, а также уровней подъема воды при гашении свободной гравитационной волны при одностороннем и двухстороннем воздействии. Результаты расчетов на примере наводнения 28–29 сентября 1975 года показали, что при гашении свободной гравитационной волны штормового нагона максимальный уровень подъема воды в устье р. Нева мог быть уменьшен с 280 см до 194–195 см, то есть на 85–86 см (на 30 %).

Ключевые слова: штормовой нагон, свободные колебания водной поверхности, управляющее воздействие

Solving the problem of damping free oscillations of the water level surface in the Gulf of Finland

V.V. Klemin, O.A. Korolyova

Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia

The proposed article is the third paper of the authors from Mozhaisky Military Space Academy published in Hydrometeorological Research and Forecasting journal (No. 1 (371) in 2019, No. 2 (380) in 2021), which show how optimization methods (from the classic calculus of variations to modern Pontryagin methods and the method of moments) can be applied for solving specific problems of managing natural processes.

In the present paper, a system of equations was chosen for forecasting storm surges in the Gulf of Finland, which, as calculations based on observations showed, allows predicting the maximum level of water rise at the Neva River mouth with an error not exceeding 10%. An algorithm for solving the problem of damping free oscillations of the water level surface in the Gulf of Finland is proposed. The results of calculations of control actions,

as well as the levels of water rise during the damping of a free gravity wave with unilateral and bilateral actions are presented. The results of the calculations on the example of the flood on September 28-29, 1975 showed that when damping the free gravity wave of the storm surge, the maximum level of water rise at the Neva River mouth could be reduced from 280 to 194-195 cm, that is, by 85-86 cm (30%).

Keywords: storm surge, free oscillations of the water surface, control action

1. Постановка задачи гашения

При гидродинамическом прогнозировании штормовых нагонов в устье реки Нева используется следующая система уравнений мелкой воды [2]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{F} \right)^2 + gF \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -F \frac{\partial P}{\partial x} + B \left(\tau - kQ \frac{|Q|}{F^2} \right), \\ B \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\xi = \xi(x, t)$ – отклонение уровенной поверхности от состояния равновесия;

$Q = Q(x, t)$ – объемный расход воды;

$F = F(x) + B(x) \cdot \xi$ – площадь поперечного сечения отклоненной от равновесия уровенной поверхности (см. рис. 1);

P – атмосферное давление;

g – ускорение силы тяжести;

B – ширина свободной поверхности залива;

τ – поверхностное ветровое напряжение;

k – коэффициент придонного сопротивления.

Последнее слагаемое левой части уравнения определяет силу градиента воды, первое слагаемое правой части определяет вынуждающую силу градиента атмосферного давления. Последнее слагаемое правой части определяет силу трения ветра и придонного трения.

Как показали исследования, выполненные Р.В. Пясковским и К.С. Померанцем [6] в 70-х годах прошлого века в Ленинградском отделении государственного океанологического института (ЛОГОИН), на стадии подъема воды в устье р. Нева вклад свободной гравитационной волны, вынуждающей силы градиента атмосферного давления и силы трения ветра примерно одинаков. Таким образом, погасив свободные колебания, можно примерно на $1/3$ уменьшить высоту подъема воды в устье р. Нева, что качественно снижает ущерб, наносимый С-Петербургу невскими наводнениями.

Как видно из системы уравнений (1), динамика свободных колебаний описывается уравнениями

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gF \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,$$

$$B \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0,$$

после перекрестного дифференцирования которых и почленного вычитания результатов дифференцирования приходим к волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (2)$$

где $a^2 \equiv \frac{gF}{B} = gH$ – квадрат фазовой скорости свободной гравитационной волны в Финском заливе при средней глубине H .

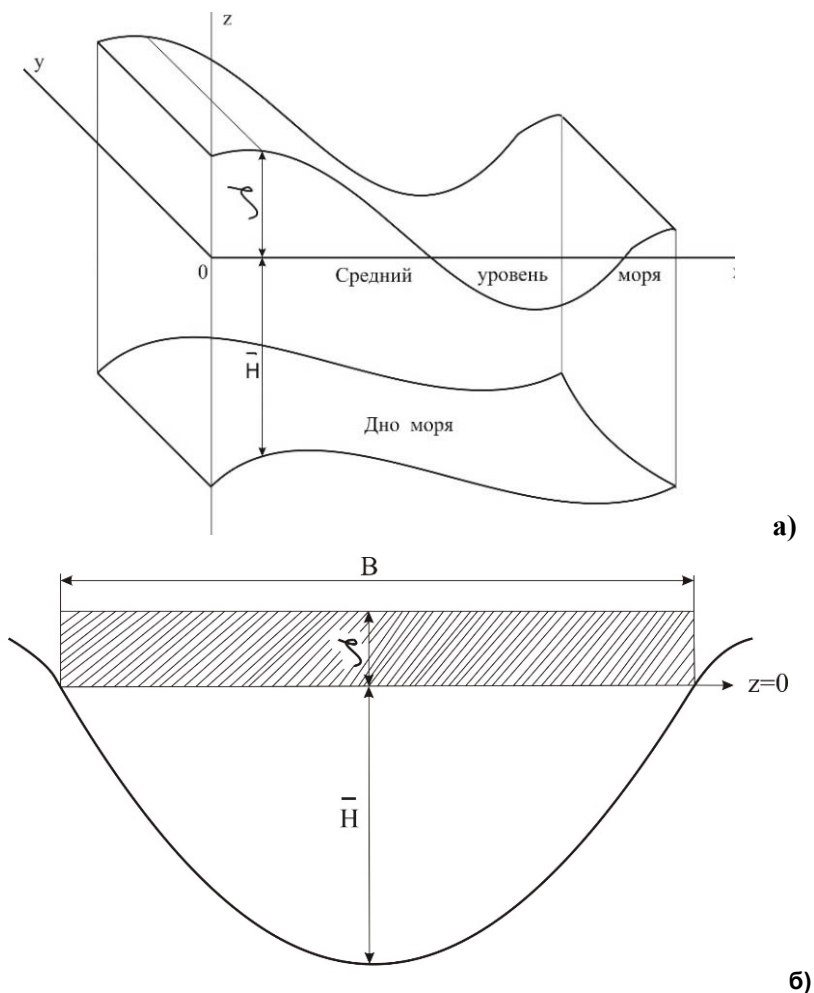


Рис. 1. Система координат и принятые обозначения (а); поперечное сечение водоема (б).

Fig. 1. Coordinate system and accepted notation (а); cross section of a reservoir (б).

Сформулируем задачу гашения свободной гравитационной волны следующим образом.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ на отрезке $0 \leq x \leq S$ задано некоторое возбужденное состояние водной поверхности, определяемое неравномерным распределением давления атмосферы и силой трения ветра. Пусть также известна в начальный момент скорость изменения уровня в каждой внутренней точке области $0 \leq x \leq S$, т. е.

$$Q(x, 0) = Q_0(x), \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial Q}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \dot{Q}_0(x). \quad (4)$$

Пусть, наконец, управляющее воздействие, направленное на гашение свободных колебаний уральной поверхности, приложено на концах отрезка $x = 0$ и $x = S$, т. е.

$$U_1(t) = Q(0, t), \quad (5)$$

$$U_2(t) = Q(S, t). \quad (6)$$

Если функции $Q(0, t)$ и $Q(S, t)$ заданы, задача (2), (3), (4), (5), (6) является классической краевой задачей для волнового уравнения. Она поставлена корректно и имеет единственное решение (см. [8]). Если же управляющие функции $U_1(t)$ и $U_2(t)$ необходимо определить, то имеем задачу краевого управления в задачах оптимизации распределенных систем, т. е. систем, в которых уравнением для ограничений используется уравнение в частных производных (см., например, [1, 3]).

Задачу оптимального управления гашением колебаний уральной поверхности воды сформулируем следующим образом: изменяя уровень водной поверхности на краях отрезка $0 \leq x \leq S$ при условии, налагаемом на вектор управляющей функции $U(t) = (U_1(t), U_2(t))$

$$\|U(t)\| \leq l, \quad l > 0, \quad (7)$$

за кратчайший срок T получить нулевое распределение амплитуд $Q(x, T)$ и скоростей их изменения $\dot{Q}(x, T)$, т. е.

$$Q(x, T) = 0,$$

$$\dot{Q}(x, T) = 0. \quad (8)$$

Это классическая задача быстрогодействия Понтрягина (см. [4]). Для нее в теории оптимального управления доказано существование и единственность решения. В нашем случае «быстродействию» по сути совпадает с понятием «реального времени штормового нагона» в устье р. Нева.

2. Решение задачи гашения

Представим решение уравнения (2) в виде суммы двух функций

$$Q(x, t) = Q_1(x, t) + Q_2(x, t), \quad (9)$$

где функция $Q_1(x, t)$ описывает свободные колебания водной поверхности, т. е. является решением задачи (2), (3), (4) при нулевых граничных условиях, а $Q_2(x, t)$ описывает вынужденные колебания, определяющиеся возмущающими граничными условиями.

Будем также искать решение методом Фурье разделения переменных, предварительно разложив решение в ряды Фурье по ортогональным функциям синусов и косинусов, т. е.

$$Q_1(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{\pi k a}{S} t + B_k \sin \frac{\pi k a}{S} t \right) \sin \frac{\pi k}{S} x, \quad (10)$$

где a – фазовая скорость гравитационной волны в водоеме глубиной H (см. рис. 1),

$$A_k = \frac{2}{S} \int_0^S Q_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \quad (11)$$

$$B_k = \frac{2}{\pi k a} \int_0^S \dot{Q}_0(\xi) \sin \frac{\pi k}{S} \xi d\xi, \quad (12)$$

и

$$Q_2(x, t) = \int_0^t K(x, t - \tau) U(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{\pi k}{S} x \sin \frac{\pi k a}{S} t, \quad (14)$$

$$C_k = \frac{2a}{S} [1 - (-1)^k]. \quad (15)$$

Напомним, что точкой над искомой функцией \dot{Q} обозначена частная производная $\frac{\partial Q}{\partial t}$ по времени.

Для нахождения решения сформулированной задачи быстрогодействия гашения свободных колебаний может быть применен метод моментов, который подробно излагается в монографии А.Г. Бутковского [1]. В этой монографии доказывается, что в итоге оптимальное управление $U^0(t)$, полученное решением l -проблемы моментов, строго совпадает с функциональным решением классической задачи быстрогодействия Понтрягина и может быть рассчитано по формуле

$$U^0(t) = \frac{1}{2} \left[Q_0(at) + \int_0^t \dot{Q}(a\tau) d\tau \right], 0 \leq t \leq \frac{S}{a}. \quad (16)$$

Итак, для решения задачи гашения необходимо и достаточно знание объемных расходов воды в каждой точке отрезка $0 \leq x \leq S$ в начальный момент t_0 и скорости изменения этих расходов.

3. Подготовка исходных данных

Исходными данными для расчета объемных расходов воды $Q_0(x)$ и скоростей их изменения $\dot{Q}_0(x)$ являлись ежечасные наблюдения уровней воды на сети береговых станций наблюдения от Балтийска до Кронштадта, которые интерполировались на ось Финского залива на основании весов, полученных по данным наблюдений 1946–1976 годов [5]. Положение станций и узлов разностной сетки численного дифференцирования и интегрирования показаны на рис. 2. Пространственный шаг сетки равнялся 70 км.

Значения скоростей воды определялись путем численного интегрирования уравнения неразрывности в системе (1) по данным ежечасных приращений скоростей объемных расходов. Использовались трехточечные формулы Симпсона.



Рис. 2. Распределение станций для вычисления уровня в узлах интерполяции.

Fig. 2. Distribution of stations for level calculation in interpolation nodes.

4. Проверка результатов численного эксперимента по управлению гашением свободной гравитационной волны

Для проверки результатов была выбрана одномерная модель гидродинамического прогнозирования штормового нагона в устье р. Нева, разработанная в ЛОГОИН и подробно описанная в монографиях [2, 6]. Все расчеты были выполнены для наводнения 28–29 сентября 1975 г. Для этого

наводнения удалось восстановить ежечасные измерения уровня Балтийского моря на прибрежных станциях от Кронштадта до Балтийска, которые, как уже отмечалось, интерполировались в узлы разностной сетки на ось Балтийского моря и Финского залива (рис. 2) с использованием весов, полученных в ЛОГОИН. Для этих сроков были использованы (восстановлены) кольцевые карты погоды, с которых снимались данные об атмосферном давлении и скорости ветра. Это позволило рассчитать вынуждающую силу градиента атмосферного давления (первое слагаемое правой части первого уравнения системы (1)) и силу трения ветра об водную поверхность (второе слагаемое правой части первого уравнения системы (1)).

По проинтерполированным в узлы разностной сетки ежечасным значениям уровня определялись разностные значения $\partial\xi/\partial t$, которые использовались для нахождения начального распределения объемных расходов воды путем численного интегрирования по x второго уравнения системы (1). В начальной точке интегрирования (в нулевом узле интерполяции, г. Кронштадт) скорость потока и объемный расход $Q(0, t)$ принимались равными нулю. Полученный в 10 узле максимальный расход компенсировался убывающей синусоидой до нулевой отметки в Датских проливах.

Таким образом, вся необходимая информация для гидродинамического прогнозирования наводнений в устье р. Нева была собрана.

Численное интегрирование системы (1) выполнялось методом Лакса – Вендроффа [7]. Граничное разностное уравнение для ξ в узле 0 записывалось направленной разностью назад для конца отрезка времени. В качестве левого граничного условия (Датские проливы) принималось $\dot{Q}(S, t) = 0$, $\xi(S, t) = 0$. В узлах сетки от 11 до 15 вынуждающая сила градиента атмосферного давления и силы трения о воздух и дно принимались равными нулю.

Из представленной на рис. 2 координатной сетки видно, что шаг дифференцирования по пространству равнялся 70 км, шаг устойчивого интегрирования по времени равнялся 7 минут, что соответствует условию Куранта – Фридрихса – Леви при средней глубине водоема 200 м.

Результаты численного интегрирования представлены на рис. 3. Из анализа результатов видно, что ошибка гидродинамического прогноза максимальной высоты подъема воды не превышает 10 см. При этом максимальный уровень подъема воды достиг 280 см в период 03–04 часа 29 сентября 1975 года.

Расчеты управляющего воздействия, выполненные для одностороннего краевого воздействия в узле 0, представлены в табл. 1. Там же представлена величина подъема воды при одностороннем воздействии. Максимальное значение подъема воды при воздействии составило 195 см в 04 часа 29 сентября.

В качестве инструмента, уменьшающего толщину слоя воды в узле воздействия, предлагается использовать гибкую емкость (подушку), которую предварительно наполняют воздухом. Затем в процессе управления воздух выпускается из подушки, что создает эффект опускающейся донной поверхности.

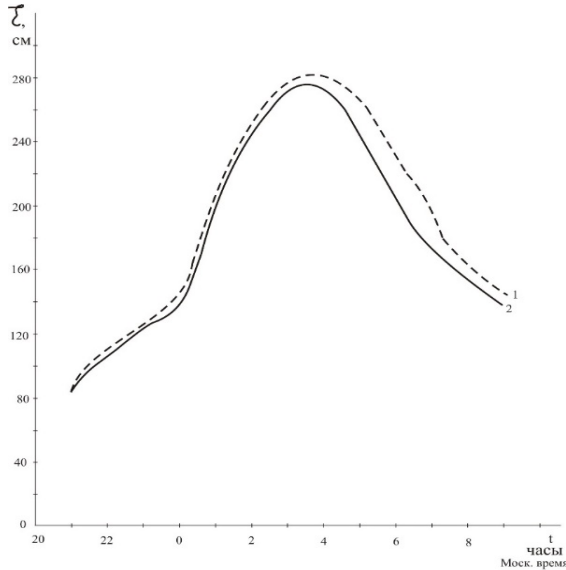


Рис. 3. Временной ход уровня водной поверхности в Кронштадте: 1 – измеренный уровень; 2 – расчетный уровень.

Fig. 3. Time course of the water surface level in Kronstadt: 1 – measured level; 2 – estimated level.

Таблица 1. Расчеты величины одностороннего воздействия 28-29 сентября 1975 г.

Table 1. Calculations of the unilateral actions on September 28-29, 1975

Время, ч	21	22	23	24	01	02	03	04	05
Величина воздействия, см	-16	-30	-42	-60	-78	-84	-96	-100	-85
Величина подъема в узле 0 при воздействии, см	78	86	110	125	138	173	192	195	184

Отметим, что в соответствии с теорией общая энергия свободной волны составляет одну четвертую квадрата амплитуды синусоиды. При пространственном шаге сетки 70 км и направленной разности назад, используемой для аппроксимации дифференциальных уравнений в крайних узлах, ширина подушки составляет 70 км.

Кроме выполнения расчетов по одностороннему воздействию были выполнены расчеты по гашению свободной гравитационной волны двухсторонним воздействием. При этом вторая (левая) точка управления располагалась в узле 3 на траверсе поселка Кунда, в самом узком месте Финского залива. Для численного интегрирования системы уравнений (1) использовалась сетка с пространственным шагом 20 км. Данные об уровне водной

поверхности в узлах сетки с шагом 20 км получались интерполированием данных в узлах сетки с шагом 70 км с помощью билинейных сплайнов. Отметим еще раз, что ширина воздушных подушек в этом случае составляет 20 км.

Результаты расчетов управляющих воздействий, а также уровни подъема воды при двухстороннем воздействии, представлены в табл. 2. Максимальное значение подъема воды в этом случае составило 194 см в 04 часа 29 сентября 1975 года.

Таблица 2. Расчет величины двухстороннего воздействия 28-29 сентября 1975 г.

Table 2. Calculations of bilateral actions on September 28-29, 1975

Время, ч	21	22	23	24	01	02	03	04	05
Величина воздействия в узле 0, см	-10	-16	-20	-34	-42	-56	-58	-66	-38
Величина воздействия в узле 3, см	-2	-8	-12	-16	-27	-32	-41	-44	-32
Величина подъема воды в узле 0, см	100	102	120	130	142	180	192	194	188

Из анализа результатов расчетов видно, что при гашении свободной гравитационной волны штормового нагона максимальный уровень подъема воды в устье р. Нева удается уменьшить с 280 см до 194–195 см, то есть на 85–86 см (на 30 %).

Заключение

Из представленных результатов исследований можно сделать следующие выводы.

1. Выбранная для прогноза штормового нагона система уравнений позволяет прогнозировать максимальный уровень подъема воды в устье р. Нева с погрешностью, не превышающей 10 %.

2. Разностная аппроксимация дифференциальных уравнений (1) и применение для ее решения метода Лакса – Вендроффа второго порядка точности по сравнению с методом Лакса первого порядка точности, который был использован Е.Н. Вольцингером и Р.В. Пясковским [2], незначительно повлияли на результаты численного интегрирования, что объясняется довольно малым отношением шагов разностного интегрирования по времени и дифференцирования по пространству в критерии Куранта – Фридрихса – Леви.

3. Применение подушки гашения свободной гравитационной волны шириной 70 км при одностороннем воздействии и двух подушек по 20 км при двухстороннем воздействии достаточно, чтобы примерно на 30 % уменьшить максимальный уровень подъема воды в устье р. Нева. При наводнении 28–29 сентября 1975 г. гашение свободной гравитационной

волны не вызывало бы необходимости принятия экстренных мер безопасности в г. Ленинграде, которые предусматривались по наставлению о штормовом предупреждении при подъеме воды выше 190 см.

В заключение авторы выражают благодарность П.В. Клемину за подготовку рукописи статьи к изданию.

Список литературы

1. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1985. 474 с.
2. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 207 с.
3. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 428 с.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Галикредидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983. 393 с.
5. *Пясковский Р.В., Вольцингер Н.Е., Михайлов Ю.Д.* Определение уровня в открытой части Балтийского моря по данным береговых станций // Труды ГГО. 1976. Вып. 380.
6. *Пясковский Р.В., Померанец К.С.* Наводнение. Л.: Гидрометиздат, 1976.
7. *Рихтмаер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.

References

1. *Butkovskiy A.G.* Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredelyonnymi parametrami. Moscow: Nauka publ., 1985, 474 p. [in Russ.].
2. *Vol'cinger N.E., Pyaskovskiy R.V.* Teoriya melkoy vody. Leningrad: Gidrometeoizdat publ., 1977, 207 p. [in Russ.].
3. *Lur'e K.A.* Optimal'noe upravlenie v zadachah matematicheskoy fiziki. Moscow: Nauka publ., 1975, 428 p. [in Russ.].
4. *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Galikrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nykh processov. Moscow: Nauka publ., 1983, 393 p. [in Russ.].
5. *Pyaskovskiy R.V., Vol'cinger N.E., Mihaylov Yu.D.* Opredelenie urovnya v otkrytoy chasti Baltiyskogo morya po dannym beregovykh stanciy. *Trudy GGO*, 1976, vol. 380 [in Russ.].
6. *Pyaskovskiy R.V., Pomeranec K.S.* Navodnenie. Leningrad: Gidrometeoizdat publ., 1976 [in Russ.].
7. *Rihtmaer R., Morton K.* Raznostnye metody resheniya kraevykh zadach. Moscow: Mir publ., 1972 [in Russ.].
8. *Tihonov A.N., Samarskiy A.A.* Uravneniya matematicheskoy fiziki. Moscow: Gostekhizdat publ., 1951 [in Russ.].

*Поступила 30.12.2022; одобрена после рецензирования 30.05.2023;
принята в печать 13.06.2023.*

*Submitted 30.12.2022; approved after reviewing 30.05.2023;
accepted for publication 13.06.2023.*