

DOI: <https://doi.org/10.37162/2618-9631-2021-2-52-65>

УДК 551.513

Решение задачи оптимального управления рассеянием тумана

В.В. Клёмин, С.С. Суворов

*Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург, Россия*

В статье рассматривается возможность применения одного из основополагающих современных методов оптимизации, а именно метода Понтрягина, при решении задач управления процессами, поведение которых описывается диффузионным уравнением. Диффузионное уравнение, относящееся к параболическому классу, дискретизируется методом прямых и сводится к замкнутой системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая позволяет отыскать оптимальное по быстродействию управляющее воздействие.

Доказано существование решения задачи оптимального управления рассеянием тумана при упомянутой дискретизации. Обоснована методика отыскания моментов переключения управляющего воздействия и выполнены расчеты для установленных двух и трех моментов переключения.

Ключевые слова: метод Понтрягина, управление рассеянием тумана, диффузионное уравнение

Solving the problem of optimal control of fog diffusion

V.V. Klyomin, S.S. Suvorov

Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia

The paper discusses a possibility of applying one of the fundamental modern optimization methods, namely, the Pontryagin's method for solving process control problems, whose behavior is described by the diffusion equation.

The parabolic diffusion equation is discretized by the method of straight lines and comes to a closed system of ordinary differential equations, which allow finding an optimal control impact in terms of operating speed.

The existence of a solution to the problem of optimal control of fog diffusion is proved for the mentioned sampling. The methodology for finding control action switching points is substantiated, the calculations for the revealed two and three switching moments are performed.

Keywords: Pontryagin's method, fog diffusion control, diffusion equation

Введение

В статьях [5] и [6] изложены основы применения классической теории оптимального управления системами с распределёнными параметрами (вариационного исчисления) к решению задачи искусственного стационарирования волн Россби.

В предлагаемой статье рассматривается возможность применения одного из основополагающих современных методов оптимизации, а именно метода Понтрягина [10], при решении задач управления процессами, поведение которых описывается диффузионным уравнением. В частности, такими задачами являются управление распространением примесей в жидких и газообразных средах, управление рассеянием тумана, управление климатом путем создания условий таяния значительных массивов льда. Ниже, на примере задачи управления рассеянием тумана, приводится ее решение.

1. Модель эволюции тумана и слоистообразующей облачности

Математической моделью процессов образования и рассеяния тумана является замкнутая система уравнений притока тепла и влаги в турбулентной атмосфере [3, 8]:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{d\theta}{dz} + \frac{Lm}{c_p \rho}, \quad (1.1)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial S}{\partial z} - \frac{m}{\rho}. \quad (1.2)$$

Здесь z — вертикальная координата; θ — потенциальная температура; S — массовая доля водяного пара; m — скорость конденсации водяного пара; k — коэффициент турбулентности; L — удельная теплота парообразования; c_p — теплоемкость; ρ — плотность.

Прямой метод решения полной системы уравнений переноса тепла и влаги (1.1), (1.2) сопряжен с большими трудностями. В [8] указывается, что основной физической предпосылкой упрощения модели служит представление о достаточно полном увлечении относительно малых влагообразных элементов облачности и тумана частицами воздуха, которые участвуют в турбулентном обмене. Уравнение переноса водности при полном увлечении облачных элементов имеет вид

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \delta}{\partial z} + \frac{m}{\rho}, \quad (1.3)$$

где δ — удельная водность облака.

Под удельным влагосодержанием \tilde{S} будем понимать массу водяного пара, капель воды и кристаллов льда в единичной массе воздуха. То есть

$$\tilde{S} = S + \delta \quad (1.4)$$

Сложив уравнения (1.2) и (1.3) и раскрывая полную производную с помощью оператора Эйлера, получим

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} + u \frac{\partial \tilde{S}}{\partial x} + v \frac{\partial \tilde{S}}{\partial y} + w \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \tilde{S}}{\partial z} \quad (1.5)$$

Умножим уравнение (1.2) на L/c_p и сложим с (1.1). Получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} + u \frac{\partial \Pi}{\partial x} + v \frac{\partial \Pi}{\partial y} + w \frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (1.6)$$

Здесь через Π обозначена функция

$$\Pi(x, y, z, t) = \theta(x, y, z, t) + \frac{L}{c_p} S(x, y, z, t). \quad (1.7)$$

Граничные условия для уравнений (1.5) и (1.6) задаются в виде потоков тепла и влаги, которые определяются в первую очередь разностью температур воздуха и подстилающей поверхности.

Предположим, что моделируется туман над сушей на значительном удалении от водной поверхности. Тогда можно пренебречь притоком влаги от подстилающей поверхности, а также горизонтальными градиентами температуры и влагосодержания [3]. Если при этом отсутствуют упорядоченные вертикальные движения, то распределение удельного влагосодержания с высотой будет стационарным, т. е. \tilde{S} будет заданной функцией высоты z .

Уравнение (1.6) при сделанных предположениях примет вид:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (1.8)$$

Будем для простоты считать, что коэффициент турбулентности не зависит от высоты. Тогда получаем

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}. \quad (1.9)$$

Так как в тумане удельная влажность S является насыщающей, т. е. определяется температурой T , при неизменном давлении p функция Π однозначно определяется температурой воздуха T .

Пусть в начальный момент времени распределение по высоте удельной влажности и водности известно, удельное влагосодержание стационарно. Можно вычислить такое распределение температуры по высоте, при котором удельная водность будет равна нулю. Это будет условием рассеяния тумана. Достижение соответствующего распределения температуры может быть целью управления.

Таким образом, задача оптимального по быстрдействию управления рассеянием тумана или слоистообразной облачности может быть сформулирована следующим образом:

За минимальное время путем воздействия на температуру воздуха вблизи подстилающей поверхности распределение температуры воздуха с высотой из заданного начального перевести в требуемое для рассеяния влагообразных облачных элементов (капель или кристаллов льда)

распределение, т. е. $T(0, z) \rightarrow T(t_{min}, z)$, где t_{min} – минимальное время рассеяния тумана.

2. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального по быстродействию управления системой, которая описывается широко распространенным одномерным диффузионным уравнением (или уравнением теплопроводности):

$$\frac{\partial q}{\partial t} = a \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}. \quad (2.1)$$

Здесь состояние системы описывается функцией распределения

$$q = q(z, t), \quad (2.2)$$

где z – пространственная координата (в нашем случае – высота над подстилающей поверхностью), $0 \leq z \leq H$; t – временная координата, $0 \leq t \leq T$.

В уравнении теплопроводности (2.1) приняты следующие обозначения:

a – постоянный коэффициент температуропроводности,

$$a = \frac{\lambda}{c_p \rho},$$

λ – коэффициент теплопроводности;

c_p – удельная теплоемкость;

ρ – плотность.

Для q задано начальное распределение.

Пусть управление $u(z, t)$ осуществляется на нижней границе слоя $0 \leq z \leq H$. Тогда краевые и начальные условия будут иметь вид

$$-\lambda \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = \alpha_1 [u(0, t) - q(0, t)], \quad (2.3)$$

$$-\lambda \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=H} = \alpha_2 [q(H, t) - f], \quad (2.4)$$

$$q(z, 0) = q_0(z). \quad (2.5)$$

Здесь $q(z, t)$ – известная функция; α_1 – коэффициент теплообмена на нижней границе рассматриваемого слоя; α_2 – коэффициент теплообмена на верхней границе слоя; $u(0, t)$ – управляющее воздействие на нижней границе слоя, которое в дальнейшем обозначено $u(t)$; f – известная постоянная величина, которая определяет отток тепла на верхней границе, необходимый для существования решения краевой задачи. Управляющее воздействие $u(t)$, как видно, приложено к нижней границе системы.

Задачу оптимального управления в этом случае можно сформулировать следующим образом.

Пусть задана некоторая функция $q^*(z), 0 \leq z \leq H$, характеризующая требуемое состояние системы. Нужно найти такое допустимое управляющее воздействие $u = u(t), 0 \leq t \leq T$, удовлетворяющее условию $|u| \leq l$ (l – известная постоянная величина), чтобы управляемая система, описываемая уравнениями (2.1) – (2.5) перешла из начального состояния, описываемого функцией $q_0(z)$ (2.5) в требуемое состояние $q^*(z)$ за минимальное время T . Используя термины теории оптимального управления, говорят, что нужно минимизировать функционал I , где

$$I \equiv \int_0^T dt = \tau.$$

3. Методика решения задачи

3.1. Дискретизация математической задачи

Для решения сформулированной в п.2 задачи оптимального по быстродействию управления проведем дискретизацию, заменив с помощью метода прямых дифференциальное уравнение в частных производных (2.1) системой обыкновенных дифференциальных уравнений (см. рис. 1). При этом для разностного представления производных по z в крайних интервалах $0 \div 1$ и $n-1 \div 1$ используем направленные разности.

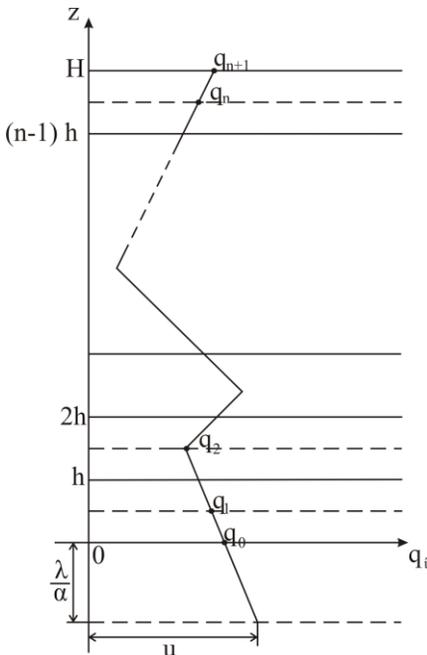


Рис. 1. Дискретизация системы с распределенными параметрами.
Fig. 1. Discretization of a distributed system.

Во внутренних точках $i = 2, 3, \dots, n - 1$ применим формулу центральных разностей. В итоге получим

$$\begin{aligned} q_0 &= \frac{\beta_1}{2 + \beta_1} U + \frac{2}{2 + \beta_1} q_1, \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= 2q_0 - 3q_1 + q_2, \\ \frac{dq_i}{d\tau} &= q_{i-1} - 2q_i + 2q_{n+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \\ \frac{dq_n}{d\tau} &= q_{n-1} - 3q_n + 2q_{n+1}, \\ q_{n+1} &= \frac{2}{2 + \beta_2} q_n + \frac{\beta_2}{2 + \beta_2} f. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система уравнений (3.1) записана в безразмерной критериальной форме, где $\tau = \frac{at}{h^2} = n^2 F_0$, $\beta_1 = \frac{\alpha_1 h}{\lambda}$, $\beta_2 = \frac{\alpha_2 h}{\lambda}$, $\beta = \frac{1}{n} \beta_i$, F_0 – критерий Фурье, β_i – критерий Био, α_1, α_2 и f – обозначения, принятые в п. 2.

Подставляя q_0 и q_{n+1} из первого и последнего уравнения во второе и четвертое уравнения системы (3.1) соответственно, получим окончательную форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dq_1}{d\tau} &= \frac{2\beta_1}{2 + \beta_1} U - \frac{2 + 3\beta_1}{2 + \beta_1} q_1 + q_2, \\ \frac{dq_i}{d\tau} &= q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}, \quad i = 2, 3, \dots, n - 1 \\ \frac{dq_n}{d\tau} &= \frac{2\beta_2}{2 + \beta_2} f + q_{n-1} - \frac{2 + 3\beta_2}{2 + \beta_2} q_n, \end{aligned} \right. \quad (3.2)$$

используемой для доказательства существования решения сформулированной задачи оптимального по быстродействию управления.

3.2. Существование решения задачи управления

Изложим кратко логику этого доказательства. Как следует из теории принципа максимума Понтрягина, для существования решения все собственные числа матрицы A однородной системы уравнений, соответствующей (3.2), т. е

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{2+3\beta_1}{2+\beta_1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{2+3\beta_2}{2+\beta_2} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

должны быть отрицательными. В [7] подробно изложено доказательство существования решения задачи. В частности, установлено, что 0 не является собственным числом матрицы A и что все собственные числа λ матрицы A принадлежат отрезку $-4 \leq \lambda < 0$. Из этого следует, что оператор A_1 матрицы A устойчив и что для любого начального состояния Q_0 , принадлежащего области определения Q , существует оптимальное по быстродействию управление, переводящее точку Q_0 в начало координат.

3.3. Теорема об n интервалах

Задача нахождения оптимального по быстродействию управления U решается с помощью принципа максимума Понтрягина. Согласно принципу максимума, оптимальное управление должно доставлять максимум функции Гамильтона, которая для системы (3.2) имеет следующий вид

$$H = -\psi_0 + \psi_1 \left(\frac{2\beta_1}{2 + \beta_1} U - \frac{2 + 3\beta_1}{2 + \beta_1} q_1 + q_2 \right) + \sum_{i=2}^{n-1} \psi_i (q_{i-1} - 2q_i + q_{i+1}) + \psi_n \left(\frac{2\beta_2}{2 + \beta_2} f + q_{n-1} - \frac{2 + 3\beta_2}{2 + \beta_2} q_n \right), \quad (3.4)$$

где ψ_1, ψ_i, ψ_n подлежат определению как множители Лагранжа.

Из выражения (3.4) следует, что H достигает максимума по $|U| \leq l$, где l – оптимальное значение функции U , когда

$$U = l \operatorname{sign} \psi_1(t).$$

В принципе максимума доказывается теорема об n интервалах переключения (см.[10]), согласно которой оптимальное по быстродействию управление системой (3.2) достигается при n переключениях управляющего воздействия $|U| \leq l$ с $-l$ на l и обратно с l на $-l$ на соседних интервалах переключения.

Таким образом, задача нахождения оптимального по быстродействию управления сводится к задаче определения моментов переключения.

Для определения моментов переключения управляющего воздействия в предлагаемой работе использован метод стыкования решений дифференциальных уравнений (3.2), который в итоге приводит к решению замкнутой системы трансцендентных уравнений относительно моментов переключения управляющего воздействия (см.[9]).

Отметим, что получение самой системы трансцендентных уравнений представляет из себя самостоятельную математическую задачу, сопряженную с существенными трудностями.

3.4. Метод стыкования решений

Итак, объект управления в нашей задаче описывается следующей системой:

$$\dot{Q} = AQ + B, \quad (3.5)$$

где

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

$$\dot{Q}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

$$B = \begin{pmatrix} k_1 U \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_2 f \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

Здесь A – матрица размерности $n \times n$, определяемая отношениями (3.3); Q – вектор-столбец размерности n , включающий функции состояния системы q_1, q_2, \dots, q_n , \dot{Q} – вектор-столбец размерности n , включающий в качестве элементов производные функций q_1, \dots, q_n , B – вектор-столбец размерности n , включающий элементы, определяющиеся внешними связями системы.

Символами k_1 и k_2 обозначены величины:

$$k_1 = \frac{2\beta_1}{2 + \beta_1}, \quad (3.9)$$

$$k_2 = \frac{2\beta_2}{2 + \beta_2}. \quad (3.10)$$

Пусть заданы векторы начальных и конечных условий: $Q(0)$ и $Q(T)$.

Тогда последовательность поиска моментов переключения может быть представлена следующим образом.

1. Будем искать решение системы (3.5) в виде

$$Q = e^{At} \cdot C - A^{-1} \cdot B, \quad (3.11)$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} - \text{вектор – столбец, состоящий из постоянных коэффициентов.}$$

2. Запишем решение системы в виде (3.11) на конце последнего интервала управления, то есть при $t = t_n$:

$$e^{At_n} \cdot C^n = Q(T) + A^{-1}B^n. \quad (3.12)$$

Учтем, что вектор B можно записать в следующих видах:

$$B = \begin{pmatrix} k_1 U \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_2 f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm k_1 l \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_2 f \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Знак первого элемента вектора (3.4.9) определяется следующим образом. Выбираем знак управления на первом интервале, затем меняем его на каждом из последующих интервалов, кончая n -м. Таким образом получаем вектор B для разных моментов переключения. Вектор B^n соответствует последнему интервалу управления.

3. Определим из (3.12) постоянные интегрирования для последнего отрезка, т. е. вектор C^n .

$$C^n = e^{-At_n}(Q(T) + A^{-1}B^n). \quad (3.14)$$

4. Произведем стыкование решений на границе последнего и предпоследнего интервалов:

$$e^{At_{n-1}} \cdot C^n - A^{-1} \cdot B^n = e^{At_{n-1}} \cdot C^{n-1} - A^{-1} \cdot B^{n-1} \quad (3.15)$$

или

$$e^{At_{n-1}}(C^{n-1} - C^n) = A^{-1} \cdot B^{n-1} - A^{-1} \cdot B^n. \quad (3.16)$$

5. Найдем $(C^{n-1} - C^n)$ из (3.16):

$$C^{n-1} - C^n = e^{-At_{n-1}}(A^{-1} \cdot B^{n-1} - A^{-1} \cdot B^n). \quad (3.17)$$

6. Определим вектор постоянных интегрирования для предпоследнего отрезка с помощью подстановки C^n из (3.14) в (3.17).

7. Состыкуем решения на границе последующих интервалов для разностей векторов $(C^{n-2} - C^{n-1})$. Это делается аналогично пунктам 4–6.

8. Определим вектор C^1 из начальных условий путем решения следующей системы:

$$e^{At_0} \cdot C^1 = Q(0) + A^{-1} \cdot B^1. \quad (3.18)$$

Получим:

$$C^1 = e^{-At_0}(Q(0) + A^{-1} \cdot B^1). \quad (3.19)$$

9. Приравняем значения векторов C^1 , полученных в пунктах (7) и (8). Определяем систему уравнений для определения неизвестных t_1, t_2, \dots, t_n , которые, согласно (3.17), входят в C^1 .

10. Рассчитываются моменты переключения управления.

3.5. Математические методы реализации стыкования уравнений

Обычно для нахождения моментов переключения t_i отыскивают собственные числа и собственные векторы матрицы коэффициентов системы уравнений (3.3), затем через них выражают решение системы. Собственные числа матрицы находят, составляя характеристический многочлен и отыскивая его корни. Сначала методом Штурма определяют корни характеристического многочлена, а затем уточняют их методом хорд и касательных.

В представленной работе при решении нашей задачи матрица A приводится к Жордановой форме методом вращений. Затем полученная методом вращений матрица приводится к диагональному виду, из определителя которой градиентным методом находят приближенные значения t_i . Приближенные значения затем уточняются методом хорд и касательных. Такой подход существенно упрощает нахождение моментов переключения t_n и сокращает время, затрачиваемое на решение задачи.

3.6. Проверка результатов с помощью численного интегрирования. Анализ результатов

Проверка результатов решения задачи оптимального управления осуществлена путем численного интегрирования системы уравнений (3.3) методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности для двух и трех найденных моментов переключения.

Значения констант задавались следующим образом:

$$\lambda = 0,034 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}},$$

$$h = 200 \text{ м.}$$

Для простоты расчетов α_1 и α_2 задавались для достаточно больших β_1 и β_2 .

Тогда

$$K_1 = \frac{2\beta_1}{2 + \beta_1} \approx 2,$$

$$K_2 = \frac{2\beta_2}{2 + \beta_2} \approx 2,$$

$$m_1 = -\frac{2 + 3\beta_1}{2 + \beta_1} \approx -3,$$

$$m_2 = -\frac{2 + 3\beta_2}{2 + \beta_2} \approx -3.$$

Пусть $l = 5K$, $f = 3K$.

Тогда $K_1 u = \pm 10$, $K_2 f = 6$.

Все перечисленные безразмерные величины K_1, K_2, m_1, m_2 соответствуют коэффициенту турбулентности $a = 10M^2c^{-1}$.

Рассмотрим случай, когда $n = 2$. Это соответствует ситуации, когда слой состоит из двух граничных и двух внутренних точек, т.е. $q_1(0) = 11,3, q_2(0) = -1,82, q_1(T) = 5, q_2(T) = 2$.

Соответствующая система уравнений для нахождения моментов переключения t_1 и t_2 будет иметь вид

$$\begin{cases} 7e^{4t_2} - 5e^{4t_1} - 12,12 = 0 \\ 9e^{2t_2} - 10e^{2t_1} - 1,48 = 0 \end{cases}$$

Решение системы методом градиентного спуска и последующее уточнение решений методом хорд и касательных приводит к результатам:

$$t_1 = 13,53 \text{ минут,}$$

$$t_2 = 20,06 \text{ минут.}$$

Максимальная погрешность решений системы имеет порядок 10^{-4} .

Результаты решения задачи при $n = 2$ представлены на рис. 2.

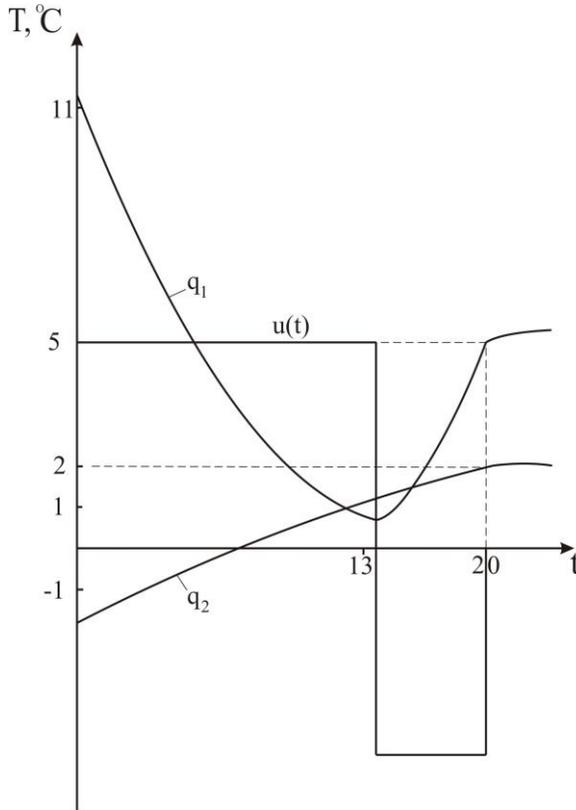


Рис. 2. Оциллограмма оптимального процесса при $n=2$.
Fig. 2. Oscillogram of the optimal process at $n=2$.

Как видно из графика хода кривых, система из начального состояния $(q_1(0) = 11,3, q_2(0) = -1,82)$ переведена в конечное $(q_1(T) = 5, q_2(T) = 2)$ состояние, соответствующее нулевой водности, т. е. рассеяния тумана.

На графике видно, что поведение функций q_1 и q_2 , соответствующих нижнему 1 и верхнему уровню от земной поверхности совершенно неочевидно. Так, на первом из моментов переключения функция q_1 достигает минимума, а затем возрастает до второго момента переключения, тогда как функция q_2 монотонно возрастает. Интересно, что обе функции остаются постоянными после второго момента переключения вплоть до конечного момента интегрирования, равного 25 минутам. Можно говорить о том, что система остается в равновесии некоторое время после повторного переключения управления.

Аналогичные расчеты выполнены для $n = 3$. Исходные условия были взяты такие же, как для предыдущего случая, а начальные и конечные значения вектора $Q(z, t)$ определялись следующими векторами:

$$Q(z, 0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(z, T) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 3. На этом рисунке по оси ординат отложена нормированная разность между составляющими векторов начального и конечного состояния системы.

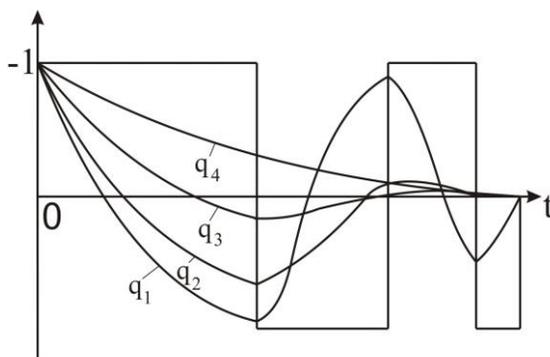


Рис. 3. Оциллограмма оптимального по быстродействию процесса.
Fig. 3. Oscillogram of the optimal process at $n=3$.

Как и в случае двух переключений, на нижних трех уровнях функции q_1, q_2, q_3 осциллируют, приближаясь к заданным значениям, тогда как на верхнем уровне функция q_4 убывает монотонно. После достижения поставленных целей, так же, как в первом случае, наступает равновесие.

В заключение авторы выносят благодарность Ирине Леонидовне Малковой, выполнившей все математические расчеты.

Список литературы

1. Берлянд М.Е. Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеиздат. 2009. 213 с.
2. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
3. Геникович Е.Л. О применении квазистационарного подхода в моделях формирования поля средних концентраций // Труды ГГО. 1985. Вып. 495.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М. Наука, 1966. 664 с.
5. Клемин В.В. Управление фазовой скоростью движения волн Россби // Труды ЛГМИ. 1990. Вып. 106. Гидрометеорология – научно-техническому прогрессу. С. 32-44.
6. Клемин В.В. О теоретической возможности искусственного стационарирования волн Россби // Гидрометеорологические исследования и прогнозы. 2019. №1 (371). С. 60-66.
7. Клемин В.В. Суворов С.С. Оптимальное управление рассеянием тумана // Труды ЛГМИ. 1985. Вып. 90. С. 107-114.
8. Матвеев Л.Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1984, 876 с.
9. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1970. 364 с.
10. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961. 391 с.
11. Фельдбаум А.А., Бутковский Л.Г. Методы теории автоматического управления. М.: Наука, 1971. 640 с.

References

1. Berlyand M.E. Sovremennyye problemy atmosfernoyn diffuzii i zagryazneniya atmosfery. Leningrad, Gidrometeoizdat publ., 2009, 213 p. [in Russ.].
2. Butkovskiy A.G. Teoriya optimal'nogo upravleniya sistemami s raspredeleennyimi parametrami. Moscow, Nauka publ., 1965, 474 p. [in Russ.].
3. Genikovich E.L. O primenenii kvazistatsionarnogo podhoda v modelyakh formirovaniya polya srednih kontsentratsiy. *Trudy GGO*, 1985, Vyp. 495. [in Russ.].
4. Demidovich B.P., Maron I.A. Osnovy vychislitel'noy matematiki. Moscow, Nauka publ., 1966, 664 p. [in Russ.].
5. Klemin V.V. Upravlenie fazovoy skorost'yu dvizheniya voln Rossbi. *Trudy LGMI*, 1990, Vyp. 106. Gidrometeorologiya – nauchno-tekhnicheskomu progressu. pp. 32-44. [in Russ.].
6. Klemin V.V. On the theoretical possibility of Rossby wave stabilization. *Gidrometeorologicheskie issledovaniya i prognozy [Hydrometeorological Research and Forecasting]*, 2019, vol. 371, no. 1, pp. 60-66. [in Russ.].
7. Klemin V.V. Suvorov S.S. Optimal'noe upravlenie rasseyanem tumana. *Trudy LGMI*, 1985, vol. 90, pp. 107-114. [in Russ.].

8. *Matveev L.T.* Kurs obshchey meteorologii. Fizika atmosfery. Leningrad, Gidrometeoizdat publ., 1984, 876 p. [in Russ.].

9. *Pontryagin L.S.* Obyknovennye differentsial'nye uravneniya. Moscow, Nauka publ., 1970, 364 p. [in Russ.].

10. *Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F.* Matematicheskaya teoriya optimal'nyh protsessov. Moscow, Fizmatgiz, 1961, 391 p. [in Russ.].

11. *Fel'dbaum A.A., Butkovskiy L.G.* Metody teorii avtomaticheskogo upravleniya. Moscow, Nauka publ., 1971, 640 p. [in Russ.].

*Поступила 31.03.2021; одобрена после рецензирования 25.05.2021;
принята в печать 21.06.2021.*

*Submitted 31.03.2021; approved after reviewing 25.05.2021;
accepted for publication 21.06.2021.*