УДК 551.513

О теоретической возможности искусственного стационирования волн Россби

В.В. Клёмин

*Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,
г. Санкт-Петербург, Россия*

Выводы, представленные в статье, относятся к квазигеострофическому приближению для описания атмосферных процессов. В качестве области определения решения рассматривается часть Северного полушария.

Полученный результат может рассматриваться как теоретическое обоснование того, что существует гипотетическая возможность воздействия на крупномасштабные атмосферные волновые процессы (стационирование волн Россби) при условии, что управляющие воздействия будут соизмеримы с пространственным масштабом синоптических процессов.

Ключевые слова: крупномасштабные атмосферные процессы, гипотетическое воздействие, стационирование волн Россби, Северное полушарие

On the theoretical possibility of Rossby wave stabilization

V.V. Klemin

Mozhaisky Military Space Academy, Saint Petersburg, Russia

The conclusions presented in the article refer to the quasigeostrophic approximation for describing atmospheric processes. A part of the Northern Hemisphere is considered as the domain of definition of the solution.

The result obtained can be considered as a theoretical substantiation to a hypothetical possibility of influencing large-scale atmospheric wave processes (the stationing of Rossby waves), provided that the control actions are commensurate with the spatial scale of the synoptic processes.

Keywords: atmospheric processes, hypothetical influence, Rossby waves stabilization, Northern Hemisphere

Стационирование волн Россби определяет однотипные погодные условия над обширными территориями в течение длительного времени.

Представляет интерес задача их искусственного стационирования путем создания дополнительных вертикальных движений на нижней или верхней границе атмосферы.

Известно, что решение линеаризованного относительно удовлетворяющего геострофическому соотношению среднего зонального потока обобщенного баротропного уравнения вихря скорости:

$$\nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi + l, \Phi \right), \tag{1}$$

где Φ – геопотенциал «среднего» уровня в атмосфере; $l = 2\omega \sin\varphi$ – параметр Кориолиса; ω – угловая скорость вращения Земли; φ – широта; $L_0^2 = \frac{\sqrt{RT_1}}{l} = \frac{c_0}{l}$ – характерный масштаб длины погодообразующей волны (волны Россби), равный в средних широтах примерно 3500 км; T_1 – температура на нижней границе атмосферы; R – газовая постоянная; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа; $(a,b) = \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}$ – оператор Якоби, позволяет получить формулу для вычисления фазовой скорости погодообразующих волн (волн Россби) [1, 2].

Второе слагаемое в левой части уравнения (1) является следствием интегрирования по вертикали горизонтальной дивергенции в уравнении вихря скорости и в геострофическом приближении по физическому смыслу представляет из себя упорядоченную вертикальную скорость на нижней границе атмосферы. При интегрировании по вертикали уравнения (1) на верхней границе атмосферы вертикальная скорость в изобарической системе координат равна нулю.

Отсюда следует, что стационирование волн Россби, при котором локальная производная $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ равна нулю в области решения задачи, зависит от скорости упорядоченных вертикальных движений на границах атмосферы.

Поставим задачу искусственного стационирования (управления фазовой скоростью) волн Россби и изложим результат ее решения на основе вариационного исчисления. [5]

Как и при численном интегрировании уравнения вихря скорости, разобьем весь интервал времени [0, T] в течение которого осуществляется стационирование волны Россби, на малые отрезки δt, в течение которых правая часть уравнения (1) может считаться постоянной.

Понятно, что при таком подходе управление на каждом из отрезков δt остается постоянным. Но от шага к шагу при численном интегрировании управление изменяется, т. е. управление зависит от времени.

Домножим левую и правую часть уравнения (1) и граничное для него однородное условие $\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{\Gamma} = 0$ на δt и перепишем уравнение (1) и граничное условие в следующем виде:

$$\nabla^2 q - \frac{1}{L_0^2} q = f(x,y), \tag{2}$$

$$q\big|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

где $q = \dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\delta t$ – локальное изменение геопотенциала в течение элементарного шага интегрирования по времени; $f = \left(\dfrac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \Phi\right)\delta t = lA_g\delta t$; A_g – адвекция абсолютного вихря скорости в квазигеострофическом приближении; $q\big|_{\Gamma}$ – граничное условие для уравнения (2).

Если мы хотим, чтобы волна Россби в течение элементарного отрезка времени δt была близка к стационарной, необходимо потребовать, чтобы локальное изменение геопотенциала q в области D определения решения было минимальным.

Задача отыскания управляющих вертикальных движений, обеспечивающих минимум фазовой скорости перемещения погодообразующих волн, может быть сформулирована следующим образом: из класса допустимых (подходящих) управлений $u(x, y)$ выбрать такое, которое удовлетворяет уравнению для ограничений

$$\nabla^2 q + u - \frac{1}{L_0^2} q = f(x, y), \tag{4}$$

где $u(x, y)$ – искусственно создаваемые на верхней границе атмосферы упорядоченные вертикальные движения, и обращает в минимум функционал

$$I = \iint_D q^2 dx\, dy = \min_u . \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) при граничных условиях (3) методом вариационного исчисления (методом Эйлера – Лагранжа) с использованием гипотезы Лэмба [6] позволяет получить выражение для оптимального управления $u^*(x, y)$ в следующем виде (см. [4]):

$$u^* = f(x, y) \tag{6}$$

или, с учетом (1),

$$u^*(x, y) = \left(\frac{1}{l}\nabla^2\Phi + l, \Phi\right). \tag{7}$$

На первый взгляд, результат может показаться тривиальным. Однако полученное строгое решение (7) позволило доказать существование абсолютного экстремума функционала (5) при уравнении для ограничений (4). Кроме того, описанная методика отыскания оптимального управления может быть легко распространена на случай, когда на $u(x, y)$ накладываются ограничения в виде равенств или неравенств. В этом случае абсолютный экстремум может не достигаться, и тогда вид функции $u^*(x, y)$ совсем неочевиден.

В частности, представляет интерес отыскание решения задачи (4), (5), когда управляющее воздействие сосредоточено в ограниченной области. Рассмотрим возможность существования такого решения.

Как известно (см. [3]), уравнение (1) при заданной правой части относительно функции $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y)$ является неоднородным уравнением в частных производных, которое носит название уравнения Гельмгольца.

Для отыскания решения уравнения (1) это уравнение записывается в полярной системе координат (r, θ), интегрируется по полярному углу θ и с помощью осреднения при фиксированном радиусе r приводится к виду

$$\frac{d^2\overline{q}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\overline{q}}{dr} - \frac{1}{L_0^2}\overline{q} = l\overline{A}_g \delta t, \tag{8}$$

где

$$\overline{q}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} q\left(r, \theta\right) d\theta, \; \overline{A}_g = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{l}\nabla^2 \Phi + l, \Phi\right) d\theta \cdot$$

Уравнение (8) решается при следующих граничных условиях:

1) на границе области R_0 отыскания решения величина $\overline{q}(R_0)$ задана;

2) при $r = 0$ величина $\overline{q}(0)$ ограничена, т. е. $\overline{q}(0) \neq \pm\infty$.

Решением уравнения (8) являются функции Бесселя мнимого аргумента (модифицированные функции Бесселя) первого и второго рода нулевого порядка, и для начала координат $r = 0$ это решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} q\big|_{r=0} = \overline{q}(0) = \frac{\overline{q}_{R_0}}{I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)} - \\ - \frac{1}{I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)}\int_0^{R_0} l\overline{A}_g(r)\delta t\left[I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)K_0\left(\frac{r}{L_0}\right) - K_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)I_0\left(\frac{r}{L_0}\right)\right] r\,dr, \end{aligned} \tag{9}$$

где $I_0\left(\frac{r}{L_0}\right)$, $K_0\left(\frac{r}{L_0}\right)$ – функции Бесселя мнимого аргумента первого и второго родов нулевого порядка (функция K_0 называется также функцией Макдональда). Отметим, что этот результат был использован советским ученым А.М. Обуховым в [7], являющейся фундаментом современных систем гидродинамического прогнозирования полей метеорологических величин.

С учетом принятых в (8) обозначений для $\overline{q}$ и $\overline{A}_g$ получаем окончательную формулу для $q\big|_{r=0}$:

$$q\big|_{r=0} = \frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)} \int_0^{2\pi} q\left(R_0,\theta\right) d\theta -$$
$$- \frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)} \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} l A_g(r,\theta)\delta t \left[I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right) K_0\left(\frac{r}{L_0}\right) - K_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right) I_0\left(\frac{r}{L_0}\right)\right] r\, dr\, d\theta. \tag{10}$$

Путем введения обозначений

$$G_1\left(R_0,L_0\right) \equiv \frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)},$$

$$G_2\left(R_0,r,L_0\right) \equiv -\frac{1}{2\pi I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right)} \left[I_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right) K_0\left(\frac{r}{L_0}\right) - K_0\left(\frac{R_0}{L_0}\right) I_0\left(\frac{r}{L_0}\right)\right], \tag{11}$$

решение (10) может быть переписано в следующем виде:

$$q(0) = \int_0^{2\pi} q\left(R_0,\theta\right) G_1\left(R_0,L_0\right) d\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^{R_0} l\, \overline{A}_g\left(r,\theta\right) \delta t\, G_2\left(R_0,r,L_0\right) r\, dr\, d\theta \cdot \tag{12}$$

Функции G_1 и G_2 носят название функций влияния по аналогии с функцией Грина $\ln\frac{R_0}{r}$, которая входит сомножителем у геострофической адвекции абсолютного вихря скорости в решении уравнения Пуассона.

Функция $G_1(R_0,L_0)$, отражающая влияние на тенденцию геопотенциала q в точке $r=0$ тенденции геопотенциала q на локальной границе радиуса R_0, является положительной, монотонной, изотропной, достигающей максимума при $R_0 \to 0$ и стремящейся к нулю при $R_0 \to \infty$.

Функция $G_2(R_0,r,L_0)$ определяет влияние адвекции абсолютного вихря A_g в различных точках области отыскания решения на тенденцию геопотенциала q в точке $r=0$. Эта функция является отрицательной, монотонной, изотропной, достигающей минимума вблизи точки $r = 0$ и равной нулю при $R_0 = L_0$.

Расчеты показывают (см., например, графики G_1 и G_2, представленные в [2]), что при R_0, равном, примерно $3L_0$ (для средних широт 10 тыс. километров), вклад адвекции абсолютного вихря скорости в приграничной области в тенденцию геопотенциала в точке $r = 0$ (ожидаемого эффекта стационирования волны Россби), не превышает 10 % от вклада адвекции вблизи точки $r = 0$.

Отсюда следует вывод, что, создавая упорядоченные вертикальные движения и обращая в ноль правую часть уравнения (1) на удалениях, превышающих, примерно, 10 тыс. км, обратить в ноль тенденцию q в точках ожидаемого результата стационирования волны Россби, т. е. в точке $r = 0$, невозможно.

В заключение заметим, что отдельно необходимо рассмотреть возможность стационирования волны Россби, в моменты времени, не совпадающие с моментом воздействия, т. е. когда моменты воздействия и их результаты, а также районы воздействия и стационирования не совпадают. Для получения желаемого результата при этом, необходимо, чтобы некоторые консервативные величины, определяющие динамику атмосферных процессов, переносились бы из районов воздействия в заданные районы стационирования погодных условий. Исследования, выполненные в 1960-х гг. как в нашей стране, так и за рубежом (М.С. Фукс-Рабинович, Ф. Томпсон, Р. Ричардсон), показали, что такой консервативной характеристикой может быть баротропная и бароклинная потенциальная завихренность. Однако консервативность этих характеристик ограничивается периодом, не превышающим 3-х суток. При средней скорости зонального потока, составляющей примерно 1000 км в сутки, можно надеяться на положительный результат на удалениях, не превышающих 3000 км от места воздействия.

Список литературы

1. *Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Численные методы прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 376 с.

2. *Гандин Л.С., Дубов А.С.* Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 427 с.

3. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 1. М.-Л.: ГТТИ, 1933. 525с.

4. *Клемин В.В.* Управление фазовой скоростью движения волн Россби // Труды ЛГМИ. 1990. Вып. 106. Гидрометеорология – научно-техническому прогрессу. С. 32-44.

5. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. М.: Наука, 1975. 490 с.

6. *Лэмб Г.* Гидродинамика. Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.

7. *Обухов А.М.* К вопросу о геострофическом ветре // Известия АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1949. Т. 13, № 4. С. 27-42.

References

1. *Belov P.N., Borisenkov E.P., Panin B.D.* Chislennye metody prognoza pogody. Leningrad, Gidrometeoizdat publ., 1989, p. 376. [in Russ.].

2. *Gandin L.S., Dubov A.S.* Chislennye metody kratkosrochnogo prognoza pogody. Leningrad, Gidrometeoizdat, 1968, p. 427. [in Russ.].

3. *Kurant R., Gilbert D.* Metody matematicheskoy fiziki. Moscow–Leningrad, GTTI publ., 1933, vol. 1, p. 525. [in Russ.].

4. *Klemin V.V.* Upravlenie fazovoy skorost'yu dvizheniya voln Rossbi. *Trudy LGMI*, 1990, vol. 106. Gidrometeorologiya – nauchno-tekhnicheskomu progressu, pp. 32-44. [in Russ.].

5. *Lur'e K.A.* Optimal'noe upravlenie v zadachakh matematicheskoy fiziki. Moscow, Nauka publ., 1975, p. 490. [in Russ.].

6. *Lemb G.* Gidrodinamika. Leningrad, Gostekhizdat publ., 1947, p. 928. [in Russ.].

7. *Obukhov A.M.* K voprosu o geostroficheskom vetre. *Izvestiya AN SSSR. Ser. geogr. i geofiz.*, 1949, vol. 13, no. 4, pp. 27-42. [in Russ.].

Поступила в редакцию 21.12.2018 г.
Received by the editor 21.12.2018.